عالم المعرفة

114

النسخة الكاملة

الرياضيات في حياتنا

تأليف: زلاتكاشبورير

ترجمة: د. فاطمة عبدالقادر المما

سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب - الكويت

عالم المعرفة

سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب ـ الكويت

صدرت السلسلة في يناير 1978 بإشراف أحمد مشاري العدواني 1923 ـ 1990

114

الرياضيات في حياتنا

ترجمة: زلاتكاشبورير

مراجعة: د. فاطمة عبدالقادر المما

يونيو 1987

المراسلات:

توجه باسم السيد الأمين العام للمجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب

ص.ب ٢٣٩٩٦ الصفاة / الكويت - 13100

العنوان الأصلي للكتاب

Zlatko Šporer

Uh, ta matematika!

Златко Шпорер

Ох, эта математика!

تقديم الكتاب

عندما تصفحت هذا الكتاب لأول مرة تراءى لي أنه كتاب عادي يتحدث عن مفاهيم نظرية المجموعات، وعندما قرأت بعض فقراته وجدت أنه يختلف عن كتب الرياضيات الكلاسيكية اختلافاً كبيراً. فالمفاهيم الرياضية معروضة فيه بطريقة مبسطة، وعبارات سلسة سهلة، وأمثلة بسيطة وقابلة للاستيعاب من قبل القراء ذوي المستويات الثقافية المختلفة. وأسلوبه الحواري الممتع يجبر القارىء.. أي قارىء على متابعة القراءة دون أن يشعر بالملل أو الإرهاق من قسوة وجدّية المادة الرياضية.

وعندما قرأت تعريف الكاتب بكتابه هذا، وسبب تسميته بهذا الاسم الغريب (آه... من الرياضيات) قررت أن أنقله إلى اللغة العربية لنفس الأسباب (انظر التعريف صفحة ١٣)، وأن أقدمه للناس ـ كل الناس ـ في وطننا العربي وخصوصا أولئك الذين لا يحبون الرياضيات وعددهم كبير. لأنه ـ كما يؤكد الكاتب ـ مهما كان المجال الذي ندرس فيه، ومهما كان المجال الذي سنعمل فيه لابد من أن نواجه فيه هذه المفاهيم الأساسية في الرياضيات المعاصرة مثل: المجموعات والعمليات عليها، وعلاقتها بالأعداد الطبيعية والعمليات عليها، التطبيقات، المنطق الرياضي، عمليات جبر المنطق.

وأهمية الكتاب في هذه المرحلة بالذات كبيرة جداً نظراً لعملية تطوير الكتب المدرسية في الرياضيات، ودخول هذه المفاهيم الرياضية الأساسية كتبنا المدرسية. ونظراً لحاجة الناس ـ كل الناس ـ لمرجع يوضح هذه المفاهيم بأسلوب جذاب يدفعهم لمتابعة القراءة للتعرف على جميع هذه المفاهيم الجديدة في الرياضيات التي يصادفونها في مختلف الكتب المدرسية.

والكاتب ـ زلاتكا شبوربر ـ هو مرب كبير يدرك نفسية الإنسان الذي يتوجه إليه بكتابه، لذا فهو يعرض المفاهيم بأسلوب حواري شيق، فهو يتصور نفسه أنه يقوم بحوار مع إنسان لا يحب الرياضيات، ومحاوره يطرح عليه أسئلة حول هذه المفاهيم الجديدة التي بات يصادفها في الكتب المدرسية والتي لم يتعرف عليها خلال دراسته السابقة، وقد تكون الأسئلة بسيطة، وقد يتهكم، وقد يستغرب بعض العناوين. . . والكاتب يجيبه على كل تساؤلاته متجاهلاً تهكمه ومبررا استغرابه.

وبما أننا اعتدنا أن نرمز بـس لعبارة السائل وبـج لعبارة المجيب، فقد اعتمدنا هنا أيضاً نفس الاصطلاح. ولكننا نلاحظ أن الكاتب قد يسأل أحيانا للتأكد من فهم محاوره لما ذكره له من مفاهيم، والآخر يجيب، إذن س هنا لم نعن بها دوماً سؤالا، وج ليست دوماً جواباً. أي أننا وضعنا س أمام عبارات المحاور، وج أمام عبارات الكاتب نفسه.

نلاحظ أيضاً أن الكاتب قد يلجأ في بعض المواقف إلى (عالم رياضيات)، أو (مرب كبير) يحاوره في موضوع ما (لاقناع محاوره بقوانين رياضية رمزية مجردة)، في هذه الحالة وضعنا اشارة● أمام كلمات العالم الرياضي ووضعنا أمام كلمات الكاتب نفسهج وقد نضع عبارات العالم الرياضي ضمن قوسين { } أو [ ].

وأسلوب الكاتب شيق ومازح، لذا فهو يتحدث مع نفسه أحياناً وليس مع محاوره، لذا فقد وضعنا هذه العبارات التي يقولها لنفسه، والتي لا تتطلب إجابة أو رداً من الطرف الآخر ضمن قوسين ( ). وقد يطرح الكاتب بعض الأسئلة على محاوره ويترك له فرصة ليجيب عليها، تاركاً أيضاً الفرصة للقارىء لكي يجيب عليها أو يحلها (إذا كانت مسائل)، وقد لجأنا لترقيم هذه الأسئلة والمسائل بالأرقام 3،2،1. . . وفي نهاية الكتاب نجد حلول وإجابات هذه الأسئلة والمسائل.

يتضمن الكتاب إضافة لتعريف الكاتب نفسه بكتابه ، مقدمة بقلم الأستاذ

أبو كورين ـ دكتور فلسفة في العلوم الرياضية والفيزيائية ـ مدير مختبر علم النفس العام والتربوي في معهد الأبحاث العلمية التابع لأكاديمية العلوم التربوية للاتحاد السوفيتي ـ موسكو . يعرفنا الأستاذ من خلالها بالكتاب والكاتب نفسه، وثلاثة فصول في المفاهيم الرياضية الأساسية هي : المجموعات والعمليات عليها ـ الأعداد الطبيعية ـ وجبر المنطق ـ. في الفصل الرابع يحدثنا الكاتب بمواضيع مختلفة حول الرياضيات ويعطينا إجابات لبعض الأسئلة الشائعة حولها مثل : هل من السهل اعطاء مسألة رياضية؟ . . . ماذا تدرس الرياضيات في وقتنا الحاضر؟ . . . أين توجد نقاط أكثر: على المستقيم أم على القطعة المستقيمة؟ . .

آمل أن أكون قد وفقت في تزويد القارىء العربي بمرجع مبسط وشيق في المفاهيم الأساسية للرياضيات المعاصرة.

تنويــــه

تود هيئة تحرير سلسلة عالم المعرفة أن تنوه بالجهد الطيب الذي قام به الدكتور عادل عبدالكريم ياسين، والمتمثل في مراجعته الفنية للمصطلحات الرياضية التي تضمنتها ترجمة هذا الكتاب لتكون قريبة الفهم من القارىء في أقطار الوطن العربي، وكذلك ما قام به من مراجعة لحلول بعض المسائل الرياضية، وإضافته لبعض الهوامش التوضيحية المناسبة لفائدة القارىء، وترتيب سرد المصطلحات الرياضية مما كان لهذه الجهود أثرها الطيب في إصدار وترجمة الكتاب في صورتها التي بين يدي القارىء.

المحتوى

مقدمة

تعريف بالكتاب والكاتب :

بقلم الاستاذ : ابو كرين*

إن هذا الكتاب الذي ألفه الرياضي والمربي البوغسلافي الشهير زلاتكا شبورير (ZLATKO SHPORER) أقرب ما يكون إلى تلك الكتب الرياضية التي تهدف إلى تكوين تصور عام ومتكامل عند القارىء حول أهم موضوعات الرياضيات المدرسية، فالكتاب يحوي فصولا لعرض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والأعداد والمنطق الرياضي.

وانتقاء شبورير هذه المجموعة من المفاهيم يتوافق مع التطور الذي طرأ على مناهج الرياضيات المدرسية. فمن المعلوم أن كل الرموز والمصطلحات والبراهين في الكتب المدرسية مبنية على أساس استخدام قواعد نظرية المجموعات والمنطق الرياضي.

ونلاحظ في هذه الكتب أيضا الاستخدام الواسع لخواص التطبيقات، وتلك التطبيقات التي تعطي مختلف التوابع (الدوال) الجبرية خاصة. إضافة إلى ذلك فإن مدخل البناء الرياضي في الكتب المدرسية قد أصبح أكثر تجريدا، لذلك فهو يتطلب استيعاب طريقة المسلمات في عرض المفاهيم الرياضية الأساسية.

غير أننا لن نجد في كتاب شبورير براهين قاسية أو وصفا موسعا أو نتائج لنظريات. ذلك أن شبورير يتوخى عرض المادة المعقدة بطريقة بسيطة وعلمية، وهدفه الأساسي في ذلك اثارة اهتمام القارىء في هذه المشاكل المعروضة، ومن

---

* ابو كرين : دكتور فلسفة في العلوم الرياضية والفيزيائية، وهو مدير مختبر علم النفس العام والتربوي في معهد الأبحاث العلمية التابع لاكاديمية العلوم التربوية للاتحاد السوفيتي - موسكو.

ثم اعطاء القارىء مقدمة تصلح أن تكون أساسا لدراسة موضوعات أكثر توسعا وشمولا.

وأثناء عرض المؤلف لموضوعاته هذه يتخذ لنفسه القاعدة التالية:

« من أجل ترويج الرياضيات ليس من الضروري أن تكون مُبتذلا في عرضها، ومن أجل العرض المبسط لا توجد ضرورة لتفسير كل شيء بشكل بسيط، وأخيرا إن المدخل الجدي في الرياضيات يجب ألا يكون مملا بالضرورة».

ومع ذلك فإن هذه الطريقة المتميزة في عرض موضوعات الكتاب لا تستطيع أن تفسر السبب الذي يجعل القارىء وإن كان لا يحب الرياضيات، حين يبدأ بقراءة هذا الكتاب، لا يستطيع ولا يريد أن يتركه. وأكثر من ذلك فإن القارىء يعود من وقت لآخر إلى بعض النقاط الصعبة فيه، دون أن ينتبه لنفسه، حتى يفهم كل ما كتب فيه. وإذا أردنا تفسيرا لهذا التصرف فلن نجد تفسيرا افضل من أن نقول: إن المهارة التربوية التي يتمتع بها شبورير هي وراء تصرف هذا القارىء بهذا الشكل.

وعندما يحدثنا شبورير عن بعض النظريات الرياضية، فإنه لا ينسى أن يحدثنا أيضا عن واصفيها سواء أكانوا من العلماء القدامى أم من المعاصرين، مشيرا بذلك ـ وبشكل واضح ـ إلى صفاتهم الإنسانية المتميزة والمثيرة للإعجاب والتي كانت سببا في نجاحهم وإبداعهم، تلك الصفات مثل: المثابرة والحكمة والقدرة على الخلق والولع الإبداعي وفي نفس الوقت، يشير الكاتب إلى أنهم أناس عاديون قد يخطئون، وربما لا يتمكنون من ايجاد حلول تامة أو براهين لكل ما يطرحونه من قضايا ونظريات. ولهذا السبب بالذات فإن القارىء يشعر بنوع من التواصل الروحي مع ابداع هؤلاء العظماء من العلماء.

ترى كيف استطاع شبورير تحقيق القيادة التربوية الضرورية للطالب والقارىء معا في كتابه؟

ولسوف يجد الطالب أثناء قراءته هذا الكتاب معلومات مطروحة بشكل رياضي مجرد في بعض القضايا الصعبة، لكنه لن يجد فيها شرحا رياضيا جافا

ومفصلا، أو تقديما لهاني قالب مجرد جاهز، ثم إن الكاتب لا ينسى أثناء ذلك أن يرفه عن القارىء ببعض النكات البارعة، أو الحكاية التي تحمل عبرة أو حكمة معينة.

إضافة لذلك فإن الكاتب قد قسم مواد كتابه - بشكل جيد - إلى مقاطع متساوية - تقريبا - في الجهد الذي يجب بذله من أجل استيعابها، وفي نهاية كل مقطع قد يقترح الكاتب على القارىء أن يرتاح قليلا، أو أن يذهب ويلعب قليلا بكرة القدم مثلا.

ولكن مهارة شبورير التربوية لا تكمن في هذه الوسائل التربوية العامة فقط لأن شبورير مدرس رياضيات قبل كل شيء، تلك الرياضيات التي عرفها الرياضي الألماني الشهير جلبرت بمايلي:

« الرياضيات لعبة نلعبها وفق قواعد بسيطة مستخدمين لذلك رموزا ومصطلحات ليس لها بحد ذاتها اي أهمية».

ويؤكد الكاتب أثناء ذلك على أن «لغة الرياضيات» واحدة من أهم الموضوعات التي تجب دراستها. ذلك أن الرياضيات بناء ولغة لوصف الطبيعة المحيطة بنا، استنادا لذلك فإننا في دراستنا للرياضيات - كما في دراستنا للغة - لابد من ادخال بعض الرموز والمصطلحات (التي تعتبر ابجدية الرياضيات)، وكذلك ادخال بعض القواعد لبناء القضايا (العبارات) الرياضية (والتي تقابل الجمل بالنسبة للغة)...

ويمتلك شبورير براعة فائقة في تفسير تلك الرموز والمصطلحات وكل الجداول التي يوردها في كتابه. إضافة لذلك فهو يستخدم لغة المحادثة الحية ويعرض عددا كبيرا من الأمثلة (التي قد تبدو مجردة) حتى يستطيع أن يتوصل إلى المفهوم الأساسي الذي يريده.. وهذه المفاهيم الأساسية الضرورية للطالب تثبت بفضل العدد الكبير من عمليات الربط والتشابه والتجميع لمعلومات سبق عرضها في الكتاب.

نريد أن نشير أيضا إلى إحدى ميزات الكتاب التربوية الهامة ألا وهي كيفية بناء

المادة التعليمية فيه، وكيف نجح شبورير في تحقيق متطلبات الطفل العلمية، من حيث سنه ومدى إدراكه، من حيث الأشكال المناسبة للروابط المنطقية للمفاهيم الرياضية التي يتناولها في كتابه.

إن التكرارات الكثيرة ـ التي سوف نجدها في الكتاب ـ والعودة إلى نظريات سبقت دراستها أو إضافة شيء ما إلى هذه النظريات لا يعد نقصا في الكتاب، إنما يعد واحدا من أهم محاسنه، ذلك أن استيعاب بعض القضايا والمفاهيم بالشكل المطلوب لا يمكن أن يتم إلا باستخدام مثل هذا الأسلوب في الدراسة.

وبهذا الشكل، فإن أولئك الذين وُضع الكتاب من أجلهم سوف يقرؤونه باستمتاع ويستفيدون منه في دراستهم، وفي نفس الوقت سوف يساعد هذا الكتاب المربين في فهم كيفية بناء العملية التعليمية لمادة الرياضيات.

ومن الواضح أخيرا أن كتاب شبورير يمكن قراءته بشكل ممتع بفضل براعة مؤلفه الفائقة في استخدامه التعابير البسيطة المناسبة والواضحة.

إلى أولئك الذين لا يحبون الرياضيات . .

ما هـــذا الكتاب ؟؟

ـ تعريف بالكتاب :

ما إن تقرأ عنوان الكتاب حتى تتساءل ما هذا الكتاب؟

ثم تضيف :

س ـ لماذا كان هذا العنوان الغريب للكتاب؟ فالعنوان عبارة مقتبسة غير مألوفة بين عناوين الكتب.

ج ـ أؤكد لك أنني لم ابتكر عنوان هذا الكتاب. لقد أوحيت أنت لي به في شكواك التي لا تنتهي من الرياضيات. وهاأنذا أكتب هذا الكتاب تحت هذا العنوان.

س ـ أنا أوحيت لك بهذا العنوان ؟

ج ـ نعم أنت . أنتم جميعا الذين لا تحبون الرياضيات، وأنتم لستم بالقليلين. منكم الشباب والعجائز، الأطفال والكبار، التلاميذ والطلاب. . . باختصار لا يمكنني أن أحصيكم جميعا.

بالمناسبة ليس من الصعب التوصل إلى عدد هؤلاء الناس.

س ـ وكيف نستطيع التوصل إلى عددهم؟

ج ـ الأمر في منتهى البساطة ، سوف أحصي على أصابعي أولئك الذين يحبون الرياضيات ثم أطرحهم من مجموع سكان العالم، فأحصل على عدد أولئك الذين لا يحبون الرياضيات.

هذه عملية بسيطة جدا أليس كذلك؟

س ـ بلى . . . ما قلته صحيح تماما. أنا لا أحب الرياضيات. وكل من حولي لا يحبونها أيضا. هل تعتقد أننا بعد أن نتعرف على كتابك سوف نجد أنفسنا مرغمين على حبها؟ أعتقد أن هذا ما تبغيه (فأنا لم أفكر بعد أأبدأ بدراسة هذا الكتاب أم لا؟).

ج ـ لا أجرؤ حتى على التفكير بأنه بعد لحظة واحدة من تعرفك على كتابي سوف يضطرم في نفسك حب الرياضيات ـ فأنا لست على هذه الدرجة من السذاجة. واذا صدف وابتكر شخص ما وسيلة «لاجبارك» على حب الرياضيات فإن الرياضيين سوف يقيمون له في حياته تمثالا، وسوف يسعون لإعطائه جائزة نوبل(١)، وهذا الشخص سوف يصبح مشهورا في كل أنحاء العالم. . . انتظر قليلا: ما الجائزة التي قلتها؟ جائزة نوبل؟؟

عفوك لقد أخطأت في الكلام: ليس جائزة نوبل وإنما جائزة فيلدس، وذلك أن جائزة نوبل لا تمنح للعاملين في مجال الأبحاث الرياضية ـ يبدو أن نوبل مثلك لم يحب الرياضيات، ولذلك لم يسمح بأن تمنح من مخصصاته جائزة للرياضيين.

س ـ ولكنني لم اسمع شيئا مسبقا عن جائزة فيلدس، ومن هو فيلدس؟

ج ـ فيلدس هو مليونير أمريكي ساخر بعض الشيء. لقد علم أن نوبل قد حرم الرياضيين من امكانية الحصول على جائزته فقرر (بسبب شذوذه على ما يبدو) تخصيص مبلغ معين من المال لكي يمنح كجائزة مرة كل أربع سنوات لمن يسهم في تطوير علم الرياضيات، ويمنح الرياضي إضافة للجائزة النقدية ميدالية تحمل اسم فيلدس مؤسس هذه الجائزة. والرياضيون يبدون احتراما خاصا لهذه الميدالية ويعدون شرف الحصول عليها جائزة كبرى، ويقومونها على أنها اعتراف عالمي بجهودهم العلمية. هذا كل ما أعرفه عن هذه الجائزة.

س ـ حسنا ولكن لماذا خصصت الكتاب لمن لا يحب الرياضيات!؟

وإذا كان الإهداء مجرد نكتة فكيف لا تخجل من الضحك على هذه المصيبة التي ابتلينا بها؟

---

(١) منذ عام (١٩٠١) وفي ١٢/١٠ ـ يوم ممات نوبل ـ من كل عام تمنح جائزة نوبل لأحد العلماء لتوصله إلى اكتشافات مهمة أو وضعه لنظريات هامة وجديدة في مجال: الفيزياء ـ الكيمياء ـ الطب ـ الأدب. ومن نفس المخصصات تصرف جائزة للعاملين من أجل تدعيم السلام العالمي

ج ـ لا . الإهداء ليس نكتة . أنا أكتب الكتاب لك، وقد قصدت ذلك بكل جدية. فالكتاب مكتوب بحق لك ومهدى إليك. والسبب الرئيس لكتابة هذا الكتاب وهذا الإهداء هو انك مضطر لدراسة الرياضيات رغم أنك لا تحبها، فليس هناك أي صف في المدرسة ـ وحتى معظم فروع الجامعة ـ يمكنك أن تمر به دون استخدام الرياضيات. إذن عليك أن تتعامل مع الرياضيات ـ إذا رغبت ـ تماما كما تتعامل مع شر لابد منه، والذي لا يمكن التخلص منه في وقتنا الحاضر في المدرسة خاصة. وكل شر لابد منه يجب أن ندرسه. وهذا مبدأ رائع يجب أن يكون رائدنا حتى في الحرب. فنحن نكره العدو ونحاربه كما يتعين علينا في الوقت نفسه أن ندرسه بأفضل شكل ممكن لكي نتمكن من الانتصار عليه.

ولنأخذ مثالا آخر من الرياضة :

كيف يبدأ المدرب تدريب فريقه في كرة القدم تمهيدا لخوض الجولة الأخيرة؟

يبدأ بتعريف أعضاء الفريق على خصائص لعبة الفريق المنافس. لماذا يفعل ذلك!؟

أعتقد أنك تدرك السبب. هذا ما أردت أن أبدأ به تعريفي لهذه المحادثة حول الرياضيات وليس أكثر.

س ـ وهل تُعرِّفنا على كتابك هذا يحمل لنا أي فائدة؟ أم سيكون ذلك مضيعة للوقت؟ خصوصا وأننا مرهقون بأعباء وظائف بيتية كثيرة.

ج ـ أقول لك بصراحة إنني لا أعرف إلى أي مدى يحمل لك كتابي الفائدة، وأنا لا أستطيع أن أعطيك أي وعد فهذا عائد إليك بالدرجة الأولى. وعلى كل حال يمكنك أن تتصفحه في أوقات الفراغ فسوف يسليك وتتعلم منه بعض الشيء.

س ـ يسليني ؟ منذ متى أصبحت الرياضيات تسلية؟

ج ـ هل تعلم أن لديك شكوكا لا حدود لها في كل شيء. لقد قلت لك إننا لن نتعرف هنا على الرياضيات، وإنما سوف نتحدث فقط حول الرياضيات

لأنها تحوي في داخلها أشياء كثيرة ممتعة ومسلية. ثم إنني لن أعرفك بالرياضيات بذلك الشكل الذي يقوم به عادة الزوج العالم لزوجته، أي التعريف على مجموعة براهين بلغة رياضية علمية قاسية وجدية. سوف أتحدث إليك ببساطة بدون قسوة رياضية وبدون براهين، وإذا تذكرت أثناء ذلك قصة ممتعة فسوف أرويها لك بالتأكيد. وعليك بدورك أن تنظر إلى الرياضيات من جانبها المسلي، ولا تأخذها بهذه الجدية القاسية، وكن واثقا أننا نستطيع أن نقترب من أي شيء - تقريبا - بالنكتة، ونستطيع أن نتعرف على أي مفهوم (مهما كان مجردا) بأسلوب مازح، وهذا ما سنفعله معا. وليقلق أولئك الذين تعودوا أن ينظروا إلى كل شيء في الحياة وفي الرياضيات بجدية لا متناهية.

تذكرت الآن أحد التعاريف المضحكة بعض الشيء، والذي سمعته لأول مرة في المدرسة منذ زمن بعيد وسوف أخبرك به:

سأل المدرس الطالب: ما المعين؟

فكر الطالب طويلا.. وأخيرا أجاب بنبرة عالية:

المعين هو مربع أعوج.

لقد مضى وقت طويل منذ سمعت هذا «التعريف». ولقد نسيت الكثير من التعاريف الرياضية «الصحيحة» والنظريات، ولكني سوف أظل أذكر هذا التعريف إلى الأبد.

وأعترف لك أنني وإلى الآن أقدر النكتة الجيدة تماما كما أقدر التعريف الصحيح. أرجوك ألا تطلع الرياضيين على هذا الكتاب وهذا أفضل لي ولك، ولا تسألني عن السبب لأنك عندما تقرأ الكتاب سوف تفهم السبب وحدك..

س - حسنا... الكتاب لن أريه أحدا. ولكني أتساءل حول أي شيء هو؟

ج - حول كل شيء تقريبا: حول رياضيي القرون القديمة والمشاكل التي عانوا

منها حول الأعداد الطبيعية وخواصها وقوانينها ـحول الأخبار المثيرة في عالم اللانهايات. حول المسلمات الرياضية ـحول المجموعات واضطراب الآراء والجدل حولها. حول الرموز والمصطلحات الرياضية غير العادية ـحول الرياضيات المعاصرة المعتمدة في الكتب المدرسية. حول الأقسام المختلفة للرياضيات وما ظهر بين الرياضيين من سوء الفهم بسببها. . . بعبارة أخرى: الكتاب يتحدث حول أشياء كثيرة مختلفة.

ولكي تجد المصطلح أو العبارة أو المفهوم الذي يهمك يكفي أن تتصفح الكتاب ـ دون أن تقرأه كله بالضرورة ـ وتأخذ العنوان الصغير للموضوع أو القضية أو النظرية أو المفهوم الذي يهمك. ومن المهم جدا أن تتمكن من ايجاد ماتريده بسهولة.

س ـ هذه فكرة لا بأس بها ومن الممكن أن أستخدمها. ومع ذلك فلماذا كان كتابك كبيرا بهذا الشكل؟ أليس من الأفضل لو أخرجته بحجم أصغر وصفحات أقل فلو كان أصغر لكان من الأسهل أن أقرر قراءته.

ج ـ حقا ـ إنك لشخص تبحث عن العيوب ـ ينبغي عدم إصدار حكم على الكتب أو على الناس استنادا إلى أشكالهم الخارجية، بل من الأفضل أن تتعرف أولا على محتواهم.

ألم تلتق في حياتك بشخص بدين ولكنه لطيف، أو بشخص نحيل ولكنه ممل؟ وكذلك الكتب. وليس أسوأ ـ بالطبع ـ من كتاب بحجم كبير وممل. ومع ذلك فإن بدا لك كتابي كبير الحجم بشكل غير معقول تستطيع أن تبدأ بالقراءة من منتصفه، أو من نهايته، أو من أي مقطع ترغب فيه (بالمناسبة أنت لا تدرى كم من الكتب قد قرأتها أنا بهذه الطريقة).

س ـ وهل أستطيع أن أفهم إذا قرأت بهذا الشكل دون أن أنظر إلى بداية الكتاب؟

ج ـ نعم سوف تفهم كل شيء ولم لا؟ هذا الكتاب ليس رواية وليس كتابا

مدرسيا. عليك فقط ألا تبدأ القراءة من منتصف المقطع. وإذا بدأت القراءة من منتصف الكتاب تستطيع في أي وقت تشاء أن تعود إلى بدايته لتقرأ ماتركته.

هل لديك أسئلة أخرى حول الكتاب؟ وهل لديك أشياء يهمك أن تعرفها أيضا قبل البدء بالقراءة؟

س ـ لم يعد لدى أي سؤال . . . إلا أنه قبل أن نبدأ المحادثة اسمح لي أن أطرح عليك آخر سؤال وهو سؤال صغير. ماالرياضيات؟ هل تستطيع أن تُعَرِّف لي الرياضيات؟

ج ـ آه . . لقد صعقتني ياأخي بهذا السؤال الذي لم أكن أتوقعه أبدا، ومع ذلك فسوف أحاول أن أجيبك عليه رغم أنني لست متأكدا فيما إذا كانت إجابتي ستنال رضاك.

لتعريف الرياضيات يمكننا أن نعود إلى مقولات عظماء الرياضيين. هذه المقولات كثيرة لا يمكن حصرها جميعها. لذا فسوف أستخدم تلك المقولة التي تروق لي فقط. ومن الممكن أن تبدو لك بعض المقولات غير عادية بعض الشيء ولكن عليك ألا تأخذها بحرفيتها.

عليك أن تثق بأن الرياضيين يعرفون مايقولون.

- يمكن تعريف الرياضيات بأنها المادة التي يصعب دوما أن نعرف الشيء الذي يدور الحديث حوله، ويصعب معرفة ماإذا كان ما نقوله صحيحا أو غير صحيح.

برتراند راسل

- الرياضيات لعبة نلعب بها وفق قواعد بسيطة مستخدمين لذلك رموزا ومصطلحات ليس لها ـ بحد ذاتها ـ أي أهمية خاصة.

جلبرت

- الرياضيات هي علم اللانهايات.

ويل

- الرياضيات هي المادة التي نحصل غالبا فيها على علامة الصفر!

طالب مجهول

الفصل الأول

المجموعات

كل شخص يعرف بنفسه ما المقصود بالمجموعة

بوريل

- كتابة المجموعة.
- انتماء عنصر إلى مجموعة وترميزه.
- تمثيل المجموعات بالرسوم (المخططات).
- المجموعات المتساوية ـ مصدر سوء الفهم!
- المجموعة المحتواة في مجموعة أخرى، أو المجموعة الجزئية.
- كيف نشكل مجموعات جديدة انطلاقا من مجموعات معروفة؟ (تقاطع واجتماع المجموعات ومتممة مجموعة).
- التطبيق أو «التوصيل» أو «تصوير المجموعات».
- (الحاصل)(١) الديكارتي للمجموعات.
- المجموعات والأعداد.
- العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد.
- المجموعة المرتبة والمجموعة المرتبة جيداً.

س ـ لأي شيء تحولت الرياضيات في وقتنا الحاضر؟؟ الجميع يدرسون هذه المجموعات. وأينما توجهت تجد مجموعات. فمن هذا الذي ابتكرها؟ لقد أوجدها ليرهق الطلاب بها فقط. أنا أيضا درست في المدرسة سابقاً وأنهيتها بشكل مقبول، لقد عشنا بهدوء بدون المجموعات، ونتصرف الآن بحياتنا بشكل جيد بدونها. أما الآن؟

منذ زمن قريب توجه إلى طفل يطلب مني مساعدته في بناء اجتماع أو تجمعات

١) تستعمل كلمة حاصل في أكثر البلدان العربية وتقابلها كلمة الجداء في بعض الأقطار. [المحرر]

لمجموعات. أخبرني من فضلك ما فائدة هذه المجموعات وهذه العمليات.

ج - قف. كفى. . . واهدأ قليلاً بربك.

كيف تهاجمني بهذا الشكل العنيف وكأنني أنا الذي أوجد هذه المجموعات أصدقك القول: إن نظرية المجموعات، ليست من ابتكاري، ولست أنا من أدخلها في المنهاج المدرسي. حقاً أنا مستعد للتصريح بأنه يستحيل أن نتصور تعليماً للرياضيات بدون نظرية المجموعات رغم أن الرياضيين مستعدون للاعتراف - كنقد ذاتي - بأنهم قليلا ما اهتموا بالمجموعات و. . . . .

س - نعم . . . هذا ما أعتقده أنا أيضا، فقد تكون هذه المجموعات ضرورية ولكن من الصعب أن نصدق أنه بدون المجموعات لا يمكن أن نجمع عددين بسيطين، إن ٢ + ٣ = ٥ معروفة حتى لأولئك الذين لم يدرسوا المجموعات.

ج - ولكن المجموعات لم تدخل الرياضيات من أجل جمع الأعداد. فهي ضرورية لاعتبارات ومجالات أخرى. فالمجموعات قد ظهرت في الرياضيات منذ. . . .

س - منذ خمس أو ست سنوات مضت أليس كذلك؟؟

ج - ليس خمس أو ست سنوات مضت وإنما منذ مئة عام.

س - منذ مئة عام؟ من غير المعقول أن يكون عمر المجموعات مائة عام.

ج - نعم نعم. . . . إن الرياضيين يؤكدون أن نظرية المجموعات ظهرت إلى الوجود في ١٨٧٣/١٢/٧م أي منذ أكثر من مائة عام.

س - ومن الذي ابتكرها؟

ج - لقد ابتكرها أحد الفلاسفة الرياضيين واسمه كانتور(٢).

(٢) كانتور (جورج) Cantor G. (١٨٤٥ - ١٩١٨) رياضي ولد في روسيا ودرس في ألمانيا وأصبح أستاذاً في جامعة Hall في عام (١٨٧٢ - ١٩١٣) معروف بأنه مؤسس نظرية المجموعات.

س ـ إذن هذا الرياضي قد مات!

ج ـ طبعاً. لقد ولد كانتور في عام /١٨٥٤م/ ومات عام /١٩١٨م/ أي في نفس العام الذي انتهت فيه الحرب العالمية الأولى.

س ـ وما الذي دعا كانتور لإدخال المجموعات في الرياضيات؟

ج ـ من المحتمل أن يكون مردّ ذلك إلى توجه كانتور نفسه نحو الفلسفة ودراسته للانهايات بصورة خاصة. أمر مدهش اليس كذلك؟؟ تصور مثلا أنه اهتم بالسؤال التالي: أي الأعداد اكثر: الأعداد الطبيعية أو الأعداد الحقيقية؟

لقد كتب كانتور في إحدى رسائله إلى أحد أصدقائه ـ هذا الصديق هو ديديكند(٣) على ما أعتقد ـ أنه قد تمكن من البرهان على أن الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الطبيعية بواسطة المجموعات.

(هل ترى معي هذه الغرائب التي يهتمون بها في رسائلهم بدلا من أن يضمنوا رسائلهم تحيات وسلامات وسؤال عن صحة الزوجة والاولاد؟؟) إن تاريخ هذه الرسالة هو ١٨٧٣/١٢/٧م وقد اعتبره الرياضيون يوم مولد نظرية المجموعات (وسوف يبدؤون قريباً بالاحتفال به كعيد كبير). هذه هي بداية نظرية المجموعات.

س ـ ولماذا يعطى الرياضيون مثل هذه الأهمية للمجموعات؟
ألا يمكن حقاً أن ندرس الرياضيات بدونها في وقتنا الحاضر؟

ج ـ بالتأكيد لا يمكن أن ندرس الرياضيات بدونها، وبامكان الرياضيين إعطاء مختلف التعليلات لهذه الموضوعة، فهم يؤكدون ـمثلاًـ أنه بفضل المجموعات أصبحت لغة الرياضيات أكثر بساطة ونقاء ووضوحا، وأصبحت الصياغات الرياضية أكثر دقة. وباستخدام المجموعات يمكن ـبنظرة واحدةـ أن نلم بأصعب بناء رياضي.

ولقد برهن العلماء على أن المجموعات موجودة في أساس الرياضيات

---

(٣) ر. ديديكند Dedekind R. (١٨٣١ ـ ١٩١٦م) رياضي ألماني.

المعاصرة، وان المجموعات يمكن استخدامها في كل مكان، وأنها مفيدة لدرجة أنه يمكن أن ندرس بها مختلف اللانهائيات، وأن . . .

س ـ هل صحيح أن المجموعات شاملة إلى هذه الدرجة؟

ج ـ نعم . . . . إذا أخذنا العناصر الأساسية في الرياضيات مثل: العدد والنقطة، فإننا نجد أن الرياضيات المعاصرة تدرس تجمعاتها المختلفة (وتدرس بصورة عامة تجمعاتها اللانهائية).

وهناك أيضا مجموعة الاشعة المتجهات. . . ومجموعة التوابع، وحتى مجموعة الخواص ومجموعة البنى. . . . . وأشياء أخرى كثيرة.

س ـ ومع ذلك فما المجموعة؟ وهل يمكننا أن نعبر عنها بمفاهيم أكثر بساطة؟.

ج ـ كلا. . . فالمجموعة مفهوم بسيط لدرجة أننا نستخدمه في حياتنا اليومية، ونستخدمه في الرياضيات لأنه لا يمكن تحويله إلى مفهوم أبسط وبالمناسبة أنت تقول في حديثك العادي: مجموعة المدن، مجموعة الدول، مجموعة الأعداد، مجموعة الطلاب، مجموعة السيارات. . . . . حتى، أن كانتور نفسه قال: إن المجموعة تعني تجمعا في وحدة تامة لأشياء مختلفة نتصورها أو نفكر بها. وعلماء آخرون قالوا ما يشبه هذا القول عن المجموعة (مثل بوريل).

س ـ إذن المجموعة يمكن أن تكون مجمعة بطرق مختلفة. هل يمكن ان نأخذ بعض الأمثلة عن المجموعة؟

ج ـ طبعا يمكن أن نأخذ الكثير من الأمثلة عن المجموعة. ولكن الرياضيات تأخذ بعين الاعتبار فقط تلك المجموعات التي تتمتع بصفات محددة بدقة، والتي تتألف من عناصر أو أعداد تجمع فيها بينها صفة عامة. أي باختصار الرياضيات تهتم بالمجموعات الرياضية.

س ـ لم افهم تماما ماذا تعني بذلك؟

ج ـ سأحاول أن أفسر لك باستخدام الأمثلة. يمكننا القول مثلا إن الأشياء:

جزرة، سيارة، كوكب الزهرة، بطة، والأشياء تفاحة، وقلم وكرة ووردة. تؤلف مجموعتين كل مجموعة منها مؤلفة من أربعة عناصر. ولكن نلاحظ أنه لا يوجد صفة عامة تشمل العناصر الأربعة في كل منها. ومثل هذه المجموعات لا تشكل أهمية بالنسبة للرياضيات ولا ندرسها، وإن كنا نورد مثل هذه المجموعات كأمثلة فقط على المجموعات. إن الصفة العامة التي تميز عناصر المجموعة يجب أن تكون بذلك الشكل الذي يجعلنا نؤكد بثقة على ما إذا كان عنصراً ما يتمتع به أو لا يتمتع بخاصة الحدود. أي على ما إذا كان هذا العنصر ينتمي لهذه المجموعة أو لا ينتمي إليها ويقال أيضا إن المجموعة يجب أن تكون معطاة بشكل جيد أو صحي.

س ـ لقد فهمت، إذن مجموعة المدن هي «» مجموعة معطاة بشكل جيد!

ج ـ . . . . اخشى أن يكون هذا المثال غير واضح . . .

س ـ ولماذا؟ هذه مجموعة واضحة تماما «مجموعة المدن».

ج ـ كلا. إنها ليست واضحة تماما وذلك لأسباب عديدة: علينا أن نتفق أولا ماذا نعني بكلمة مدينة؟ هل هي مركز تجمع سكاني يحوى عددا معينا من السكان أم أنه شيء آخر؟ وهل نعني هنا ـ في هذا المثال ـ مدن دولة واحدة أم مدن قارة أم مدن كل العالم أم. . . . .

س ـ وكيف إذن نعطي المجموعة بشكل صحيح؟.

ح ـ يجب أن نعطي المجموعة بشكل أكثر دقة. مثلا:

مجموعة عواصم الدول العربية، مجموعة مدن الجمهورية العربية السورية التي يزيد سكانها عن /٢٠٠/ ألف نسمة، مجموعة مدن العالم التي يزيد عدد سكانها عن /٣/ ملايين نسمة، أو: مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على /٥/، مجموعة طلاب الصف الثالث (في مدرسة ما)، مجموعة أيام الاسبوع . . . مجموعة الطلاب الممتازين في صفك علماً بأن الطالب يكون ممتازا إذا كان معدله أعلى من ٩٠٪.

س ـ ها. ها. ها في صفي لا يوجد أي طالب ممتاز.

ج ـ غير مهم في هذه الحالة سوف نقول إن مجموعة الطلاب الممتازين هي مجموعة خيالية.

س ـ وكيف تكون خيالية؟

ج ـ بكل بساطة . . . خالية أي لا يوجد فيها أي عنصر. ولكن دعني الآن أفسر لك الأمر بشكل أكثر وضوحا إذا لم يكن لديك مانع. يلزمك فقط أن تتحلى بالصبر، طالما أنه لا بد لنا من التعرف على بعض المفاهيم الأساسية في المجموعات.

كتابة المجموعة :

هناك طريقتان لكتابة المجموعة، ولكل طريقة بعض المحاسن وكذلك لها بعض المساوىء. لنتعرف على هاتين الطريقتين:

طريقة القائمة : وهي أبسط الطرق لكتابة المجموعة، حيث نكتب جميع عناصر المجموعة (أو قائمة بعناصر المجموعة)، ثم نحصرها ضمن قوسين كبيرين على أن نفصل بين كل عنصرين منها بفاصلة. مثلا:

{ نبيل، عبد الرحمن، جورج، مرعى }

{٣، ٤، ٥ }   { ٩ }   {ا، ب، جـ، د}. . .

ومحاسن هذه الطريقة في كتابة المجموعة تتلخص في أننا لن نشك في أن عنصرا ما ينتمي (أو موجود) في هذه المجموعة أو لا ينتمي، طالما أن هذا الانتماء واضح من استعراض عناصر المجموعة المكتوبة أمامنا، ولكني أعتقد أنك قد لاحظت معي مساوىء هذه الطريقة في كتابة المجموعة.

فهذه الطريقة ـ كما ترى ـ ليست مريحة من أجل التعبير عن مجموعة تحوى عددا كبيرا من العناصر مثلا: مجموعة طلاب مدرستك أو مجموعة الحركات في لعبة الجمباز. أعتقد أنها ستكون تسلية مناسبة لك تماما. لو طلبنا إليك أن تكتب جميع عناصر هاتين المجموعتين!. أضف لذلك أنه توجد مجموعات تحوى مليون إنسان، أو مجموعة عدد عناصرها غير منتهية (مجموعة الأعداد الطبيعية مثلا).

إننا ـ وللأسف ـ لا نستطيع أن نكتب مثل هذه المجموعات بطريقة القائمة مهما حاولنا ذلك. وبمناسبة ذكرنا للمجموعات التي عدد عناصرها غير منتهية. أود أن أشير إلى بداية ظهور نظرية المجموعات. لقد ظهرت هذه النظرية أثناء دراسة صفات «المجموعات الكبيرة» أي المجموعات التي لها عدد كبير من العناصر «والتي تضم ـ بالطبع العدد لا نهاية». ولنا كل الحق أن نؤكد على أنه لولا هذه المجموعات الكبيرة «وما ارتبط بها من مشاكل» لما ظهرت نظرية المجموعات.

ولكتابة هذه المجموعات الكبيرة ابتكر الرياضيون طريقة أقصر لكتابة المجموعة. وهذه الطريقة الجديدة ليس لها علاقة بعدد عناصر المجموعة. لقد ناقشوا الموقف ـ تقريبا ـ بالشكل التالي:

« من الأفضل ، في هذه الحالة، أن نثبت فقط الصفة المميزة التي تتمتع بها عناصر المجموعة. وكل الأشياء التي تتمتع بهذه الصفة المميزة سوف تكون عناصر في المجموعة، وتلك التي لا تتمتع بهذه الصفة المميزة لا يمكن أن تكون عناصر في هذه المجموعة».

ولقد سميت هذه الطريقة لكتابة المجموعة **بطريقة القاعدة** (أو القانون أو الصفة المميزة). أنا لا أعرف بالضبط من هو الرياضي الذي ابتكر هذه الطريقة، ولكني متأكد من أن هذا الرياضي لا يحب الكتابة كثيرا، إنما يفضل الاختصار في التعبير عن المفاهيم. ولقد أعجبت هذه الفكرة رياضيا آخر ووافق عليها «فهي طريقة ليست سيئة»، وهكذا استخدمها الرياضيون للتعبير عن الكثير من المجموعات. لنر مثالا على ذلك:

إن مجموعة الأعداد الطبيعية تكتب بطريقة القائمة كمايلي:

{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ، ، . . . }*

أما بطريقة القاعدة فنكتبها :

{ س التي تحقق الخاصة : س هو عدد طبيعي }

* هناك اتفاق بين الرياضيين على الاستعانة بنقاط ثلاث فقط. . . لتعني الخ رياضيا. (المحرر)

والرياضي لا يهمه نوعية س هنا ، المهم فقط أن يحقق الصفة المذكورة وهي أنها عدد طبيعي «ذلك أن س هنا هو عدد طبيعي». وفي مثال آخر سوف يكون س طالبا من طلاب الصف، أو إحدى حركات الجمباز، أو فردة حذاء لأحد طلاب الصف! . . . لا تظن أنني ألقي عليك نكتة.

فالرياضي يكتب مجموعة الفردات اليسرى لأحذية طلاب الصف «الخامس مثلا» كمايلي: {س التي تتمتع بالخاصة. س هي الفردة اليسرى لحذاء طالب في الصف الخامس}

وفي مثال خامس قد تكون س إحدى الكواكب السيارة.

وفي مثال سادس قد تكون س عاصمة إحدى الدول.

وفي مثال سابع قد تكون س عددا صحيحا.

إذن س يمكن أن تمثل اى شيء.

ولكن هذه الطريقة في كتابة المجموعة بدت للرياضيين طويلة أيضا. لقد اصطدموا بالعبارة «التي تحقق الخاصة»، أو «التي تتمتع بالخاصة»، والتي يكتبونها في كل مجموعة فقرروا اختزالها. وهكذا وبجهود مشتركة فيما بينهم أوجدوا الرمز «/» بدل هذه العبارة. ورأى بعض الرياضيين امكانية تبسيطه أيضا إلى الشكل «:». لذلك فانه وفي جميع كتب الرياضيات نجد نفس الرمز الذي يحمل نفس المعنى:

/ (ويقرأ : التي تتمتع بالخاصة) أو «حيث اختصارا».

: (ويقرأ : التي تتمتع بالخاصة).

فمجموعة الأعداد الزوجية الأصغر من ١٠٠ تكتب بالشكل:

{ س/س - عدد زوجي أصغر من ١٠٠} أو

{ س : س - عدد زوجي أصغر من ١٠٠ }

القطعة الصغيرة (-) تقرأ: هي

ثم إنه إذا تكرر ذكر إحدى المجموعات في نص رياضي معين فلا تظن أن الرياضي يكتبها في كل مرة، ولا تنتظر منه ذلك.

عندما يكتب المجموعة لأول مرة يضع أمامها حرفاكبيرا مثل س‍ «أو يسميها بـ س‍ » مثلا :

س‍ = { س : س عدد زوجي اصغر من ١٠٠ }

وعندما يريد ذكر هذه المجموعة مرة ثانية فإنه يكتب: المجموعة س «وإذا أردت أن تعرف ماهي س عليك أن تنظر إلى الأعلى».

نعم ياصديقي . هذه حال الرياضيين، فهم لا يحبون الكتابة كثيرا، «وكذلك لا يحبون الكلام كثيرا»، ولذلك فعلينا أن نتعلم كيف نقرأ كتابتهم «الهيروغلوفية» هذه.

إن الرياضيين يسعون دائما لاستخدام أقل عدد ممكن من الرموز لاعطاء أكبر قدر من المعلومات ـ وعندما تتحول أبسط الأشياء إلى لغة الرموز والمصطلحات نتصور دوما أنها قد أصبحت أشياء غير مفهومة. وإذا سألت الرياضي بدهشة عما تعنيه هذه الرموز والمصطلحات ولماذا يستخدمها في كتابته. فلن يجيبك الرياضي بأكثر من ابتسامة غامضة . . . فما رأيك بهذه الإجابة؟ إنهم يستمتعون بلغة الرموز هذه. . . أما نحن فعلينا أن نناقش طويلا «وبملل» هذه الرموز حتى نستطيع أن نقرأ ونفهم كل ما يكتبون.

وبما أننا توقفنا بعض الشيء عند الرموز والمصطلحات، هل تستطيع أن تعرف ما الفرق بين الرمز ب والرمز {ب}؟

الإجابة بسيطة : إن الرمز ب هو رمز عادي، «أو حرف» نعبر به عن عنصر مجموعةما.

أما الرمز {ب} فهو يعني مجموعة مؤلفة من عنصر واحد هو ب.

أما إذا لم يكن هناك أي عنصر في المجموعة نرمز لها بالرمز Φ وتقرأ «فاي».

« لنلاحظ أن هذا الرمز يشبه الصفر العربي(*) O مشطوبا. أي Φ» وإذا

---

(١) تسمى الأرقام 0، 1، 2، 3، 6 بالأرقام العربية، بينما تسمى الأرقام ٠، ١، ٢، ٣ بالأرقام الهندية

سألك أحد السؤال التالي: ماذا نعني بالكتابة {{ب}} ؟

يمكنك أن تجيب : هذه مجموعة مؤلفة من العنصر الوحيد هو المجموعة [ب] أي أن عناصر المجموعة قد تكون مجموعات بدورها، وهذا شيء طبيعي جدا أي أنه يمكن أن نجد مجموعات من الشكل:

{{ب ، جـ } ، {د ، هـ } ، { و ، ي }}

أي مجموعة عناصرها هي مجموعات تتألف كل منها من عنصرين.
والآن تستطيع أن تسأل ـ ذلك الرياضي ـ السؤال التالي:

هل يوجد مجموعة جميع المجموعات؟

ومهما يكن جوابه ـ التأكيد أو النفي ـ تظاهر أمام هذا «العالم» باحترامك الشديد له لاتساع معارفه في نظرية المجموعات، ذلك أنني أشك في فهمه لجوهر هذا السؤال. فهذا السؤال قد طرحه الفيلسوف والرياضي الإنكليزي برتراند راسل (١٨٧٢ ـ ١٩٧٠) ولا يوجد له حتى الآن جواب محدد ووحيد حتى عند الرياضيين أنفسهم.

انتماء عنصر إلى مجموعة وترميزه :

لنفرض أن لدينا مجموعة س تحوي ثلاثة عناصر ب، جـ، د
أي أن س = { ب، جـ، د} فهذا يعني أن :
ب عنصر من المجموعة س و
جـ عنصر من المجموعة س و
د عنصر من المجموعة س

ولكني أعتقد أنه أصبح واضحا لك أنه لا يوجد رياضي يكتب بهذا الشكل، أو يعبر بهذا الشكل عن وجود العنصر ب مثلا في المجموعة س، ذلك أن الرياضيين، وكما قلت لك سابقا، لا يحبون الكتابة. فما أن يصطدم الرياضي بتكرار نفس الكلمات بنفس الترتيب حتى يبحث عن رمز يكون بديلا لهذه

الكلمات. «ولست أدرى من أين يأتون بهذا العدد الكبير من الرموز؟»

وهكذا فبدلا من كتابة العبارة «هو عنصر في المجموعة»، أو «ينتمي للمجموعة» أدخلوا الرمز ∋ (ويقرأ: ينتمي للمجموعة...) وكتبوا:

ب ∋ س~

جـ ∋ س~

د ∋ س~

أما إذا كان العنصر لا ينتمي للمجموعة فإن الرياضيين يستخدمون لذلك رمزا مشابها مشطوبا عليه أي ∌ (تماما كما يعتبرون أن الرمز ≠ يعني: لا يساوى). فللإشارة - مثلا - أن العدد/٢/ ليس عنصرا من المجموعة س~ يكتبون ٢ ∌ س~.

تمثيل المجموعات بالرسوم (المخططات):

س - وهل يمكن تمثيل المجموعة بالرسوم؟

ج - كنت أعلم أنك سوف تطرح علي مثل هذا السؤال لأننا جميعا نحب الرسوم ونعتبرها أبسط وسيلة للايضاح. لقد طرحت مثل هذا السؤال يوما ما على أحد الرياضيين معتقدا أنني سوف أجعله معجبا بي لسعة اطلاعي على نظرية المجموعات.

فهل تدرى كيف أجابني على هذا السؤال؟. كان يجب أن ترى إجابته لا أن تسمعها فقط. فقد اعترى وجهه للوهلة الأولى، فور سماعه السؤال، انقباض وكأنه أكل لتوه قطعة ليمون ثم نظر إلى بعد ذلك نظرة أسف، ثم حك وراء أذنه وقال:

[نعم .. نعم لقد سمعت أنهم يقومون بتمثيل المجموعات بالرسوم وذلك على سبيل التمرين في رياض الأطفال وما شابهها. وبما أنه يجب أن نرسم للأطفال شيئا ما لنثير اهتمامهم فقد لا يكون هذا العمل - تمثيل المجموعات بالرسم - سيئا لدرجة كبيرة، ولكن تأكد أن كتب الرياضيات الجدية لا تجد

فيها أي رسوم للمجموعات (هذه الرسوم نجدها عادة في تلك الكتب التي تحوى ما يمكن أن تسميه بنظرية المجموعات المبسطة (أو الساذجة) فقط، أما في الكتب الأخرى فلا يمكن أن نجد رسما لمجموعة)، نطلق عادة اسم نظرية المجموعات المبسطة (الساذجة) أو الكلاسيكية على تلك المفاهيم من نظرية المجموعات التي تدرس في المدرسة (في المراحل الأولى منها].

وبصورة أدق : إن نظرية المجموعات المبسطة هي التي لا يوجد في أساسها أي مسلمات، أي ندرسها دون أن نضع مسلمات نظرية المجموعات في أساسها.
- ولكننا نصادف - بالطبع - أحيانا «نظرية المجموعات المختلفة» (وهذا بالطبع ليس تسمية رسمية لما نصادفه) التي لا علاقة لها بنظرية المجموعات المبسطة ولا علاقة لها بنظرية المجموعات المبنية على أساس المسلمات ولا علاقة لها حتى بالرياضيات كلها.

ج - هذا أمر شيق فعلا . وما هوية نظرية المجموعات هذه؟

- يمكنك أن تتصور هويتها بنفسك انطلاقا من الأمثلة التالية التي قد نصادفها فيها:

يرسمون ثلاث بقرات ودجاجتين وكلبا واحدا، ثم يحيطونها جميعا بخيط واحد، وهذا الشكل الناتج يسمونه مجموعة، أما إذا لم تحطها بأي خيط فهذه ليست مجموعة!!

وإذا أحطنا بعد ذلك البقرات وحدها بخيط آخر والدجاجتين بخيط ثالث (أو خط) والكلب وحده، فالشكل الناتج هو مجموعات جزئية!!

وبعد أن يتعرف « قطيع من الأغنام» على هذه الأمثلة، سوف يصبح كل «خروف» متأكد من أنه قد فهم نظرية المجموعات بشكل كامل مادام قد فهم هذه الأمثلة!!

هذا هو - على الأغلب - أكبر نقص في تمثيل المجموعات بواسطة الرسوم، وفي

نفس الوقت، هي السبب الرئيس لعدم جدية مثل هذه (النظريات)

ج - بعد هذا الشرح والتفسير من قبل الرياضي لم أعد أرغب أبدا في أن أخبره بصراحة أنني أنا أيضا قد مثلت المجموعة بالرسوم واعتبرت أنني قد تعلمت المجموعة بسرعة بفضل الموهبة الرياضية الطبيعية التي أتمتع بها بكل تواضع!!

غير أنك قد اقتنعت معي بنفسك أن متابعة الحوار مع هؤلاء الرياضيين سوف تفقد كل معنى لها، لأنه سوف يبدأ بعد ذلك باستجوابي حول رأيي في بعض مسلمات نظرية المجموعات.

ولكن ما فائدة هذه المسلمات لي «الآن» طالما أنني أستطيع باستخدام بعض الرسوم أن أفسر كل شيء بشكل ممتاز. إضافة لذلك أستطيع استخدام الألوان والوسائل الأخرى مثل: الدوائر الصغيرة والنقاط والمثلثات و. . . لتسمية وترميز عناصر المجموعة وهذا شيء جيل جدا. ولكن هذا الرياضي يبدى تخوفه من كل هذه الرسوم والوسائل ويدفعني نحواستخدام المسلمات. . وهذا هراء. . . وأنا لن استخدمها.

كنت اتمنى أن ترى وجهه عندما نظر إلي وهو يقول:

إن كل « خروف » سوف يصبح متأكدا من أنه قد فهم نظرية المجموعات بشكل كامل طالما أنه فهم هذه الأمثلة!! (هذه قلة أدب واستخفاف بالناس).

بعد حديثي مع هذا الرياضي بهذا الشكل المتعجرف، رغبت في معرفة وجهة نظر مدرس الرياضيات ذي الخبرة الطويلة في العمل التربوي. فتوجهت إلى زيارة أحد مدرسي الرياضيات القدامى الذي أحيل على التقاعد منذ زمن وسألته:

- ارجو أن تفسر لي لماذا يتهرب الرياضيون من تمثيل المجموعات بالرسوم؟

تنحنح ، هذا المربي ، ثم أجابني مفسرا بلطف متناه:

+ هناك جملة مشاكل تبرز أثناء تمثيل المجموعات بالرسوم، ولذلك فإن الرياضيين يتهربون منها. واليك أمثلة من هذه المشاكل:

- غالبا ما تمثل عناصر المجموعة اثناء الرسم بنقاط متماثلة، وبدوائر صغيرة متماثلة أو بمثلثات، ولكننا نعلم أنه لا يوجد في المجموعة عناصر متماثلة!! اي ان جميع عناصر المجموعة تكون مختلفة ومتمايزة.
- هناك بعض المجموعات ـ مثل مجموعة كل النقاط في المستوى ـ لا يمكن أن نحيطها بخط مغلق.
- إضافة لذلك عليك أن تكون حذرا ـ وبصورة خاصة ـ عندما تريد أن تشير إلى مجموعة واقعة داخل مجموعة والتي نسميها مجموعة جزئية، ذلك أن هذه المجموعة الجزئية يمكن أن تفهم وكأنها عنصر من المجموعة الأصلية. فإذا صادفنا مثل هذه الحالة ـ مجموعة داخل مجموعة فإن بعضهم سوف يؤكد على أن هذا عنصر من المجموعة وليس مجموعة جزئية والآخرون يؤكدون على انها مجموعة جزئية.
- ويمكن أن تجد أيضا من يريد أن يشير إلى المجموعة الخالية فيأخذ قطعة ورق نظيفة ويؤكد على أنها تمثل المجموعة الخالية...

(لقد قدم لي الكثير من الأسباب، ولكني أعترف أنني نسيتها. أعتقد أن هذه الأسباب التي ذكرتها تكفي). ولهذا فإن الرياضيين يتهربون قدر الإمكان من رسم المجموعات.

ـ وهل هذا يعني أنه يجب عدم رسم المجموعات؟

+ كلا أنا لم أقل ذلك. أحيانا يكون الرسم موضحا للفكرة.

فأنا أعلم بالتجربة أن الأطفال يحبون الرسم. ولكن يجب علينا، في كل مرة نلجأ فيها للرسوم، أن نذكر الأطفال أننا نستخدم الرسوم كوسيلة مساعدة لملاحظة المجموعة وفهمها بسهولة وليس أكثر من ذلك.

وعلى كل الأحوال يجب تحذيرهم والاعتدال في استخدام الرسوم ذلك أن هذا

التمثيل يعطيهم - كقاعدة عامة - تصورا خاطئا عن المجموعات.

إذن تستطيع - إذا أردت - أن تستخدم تمثيل المجموعات بالرسم، على ألا تأخذها بشكل جدي تماما.

- ولكن ما هي الأساليب التي يمكن أن نمثل فيها المجموعات؟

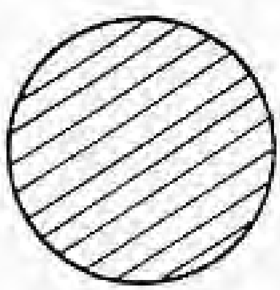
+ إن تمثيل المجموعات يتم بأساليب مختلفة. فلا توجد هنا أي قاعدة لاستخدام أسلوب معين لتمثيل مجموعة في موقف رياضي معين طالما أن كل الاساليب لا تنتمي إلى الرياضيات!!

ولكن يوجد - في الواقع - أسلوب رياضي واحد صحيح لتمثيل المجموعات، وهذا الأسلوب يمكن استخدامه فقط في حالة كون المجموعة لا نهائية.

وبصورة أدق: يمكن استخدام هذا الأسلوب في تمثيل المجموعة عندما تكون المجموعة مؤلفة من عدد لا نهائي من العناصر بشرط أن تكون هذه العناصر نقاطا.

- وما هذا الأسلوب في تمثيل المجموعات؟

+ يمكن أن نمثل المجموعة - بشكل تقريبي - بجزء من المستوى محاط بخط مغلق. فإذا فرضنا أن جميع النقاط ضمن الخط المغلق عناصر للمجموعة (وعددها لا نهائي) فإن تمثيل هذه المجموعة قد تم بشكل صحيح.

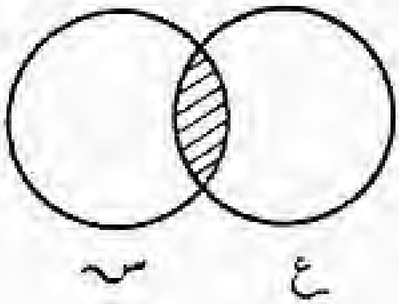


إن مثل هذا التمثيل للمجموعات يسمى «مخطط فن(٤)» لتمثيل المجموعات». ومثل هذه الرسوم غالبا ما تساعد على التأمل والتفكير والوصول إلى النتائج الصحيحة طالما أنها تسمح بربط المجموعة «المجردة» بمجموعة حقيقية مرسومة على الورق. أضف إلى ذلك، أنه لدى تمثيل المجموعات اللانهائية بهذا الشكل،

(٤) جون فن (١٨٣٤ - ١٩٢٣) عالم منطق إنكليزي.

لن تنشأ أي مشكلة من تلك المشاكل التي يتصف بها التمثيل بالرسوم لمجموعات ذات عناصر منتهية.

فإذا أردنا مثلا أن نشير إلى المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بين مجموعتين (أي تقاطع مجموعتين) بمخططات فن للمجموعات التي هي جزء من المستوى س، ع.



فيمكننا تنفيذ ذلك بسهولة (كما في الشكل المجاور، غير أننا يجب أن نتذكر أن الجزء المشترك بين المجموعتين س، ع هو أيضا مجموعة ذات عناصر غير منتهية - في الحالة العامة - والجزء المشترك بين المجموعتين س، ع هو الجزء المظلل في الشكل.

إذن فقد اتضح لنا، بهذه الطريقة، امكانية تمثيل المجموعات اللانهائية بالرسم (وإن كان بطريقة غير عادية)، وذلك فقط في حالة كون عناصر المجموعة نقاط المستوى، والرياضيات لا تبدى أي معارضة لهذه الطريقة.

وعلى هذا الأساس، فإذا كنت ترغب في عرض المجموعات بواسطة المخططات، فعليك أن تفعل ذلك تماما كما قلت لك.

أي فقط في حالة المجموعات المؤلفة من عدد غير منته من العناصر. والعناصر هي نقاط المستوى، أما إذا كنت تتعامل مع مجموعات مؤلفة من عدد منته من العناصر فمن الأفضل أن تكتب هذه المجموعات لا أن ترسمها.

- ياللأسف: لقد ظننت أنه بفضل الرسوم سيكون «في جيبي» عدد قليل من المجموعات!.

+ الكثيرون ظنوا ذلك يابني.. ولكن من الأفضل أن تحتفظ بهذه «الأشياء» في رأسك وليس في «جيبك»!

المجموعات المتساوية ـ مصدر سوء الفهم

س ـ ولماذا يكون تساوي المجموعات مصدر سوء الفهم؟

ج ـ ذلك لأننا عندما ندرس تساوي المجموعات ننسى ـ عادة ـ إحدى أهم خصائص المجموعات والتي تتلخص في أنه لايوجد في المجموعة عناصر متماثلة، أي أن كل العناصر في المجموعة يختلف الواحد منها عن الاخر.

س ـ وهل هذا يعني أنه لايمكن أن نضع بعض العناصر المتماثلة في مجموعة؟

ج ـ يمكن أن نضع مانشاء من العناصر المتماثلة في مجموعة، ولكننا نعتبرها جميعها كعنصر واحد للمجموعة، وهذا يماثل تماما الحالة التي يشتري فيها شخص واحد خمس بطاقات للدخول إلى المسرح، فالبواب في المسرح سوف يأخذ منه البطاقات الخمس ويمزقها كلها ـ اذا رغب الشخص في ذلك ـ فكل هذه البطاقات تلعب دور بطاقة واحدة ـ إذا دخل فيها شخص واحد إلى المسرح ـ لقد دفع الشخص بدون مبرر ثمن خمس بطاقات تماما كما تحاول أنت ـ وبدون مبرر ـ أن تضع في مجموعة عددا من العناصر المتماثلة. إذن يفترض دوما أن كل عناصر المجموعة تختلف الواحد منها عن الاخر. وبعبارة أخرى: المجموعة بالتعريف لايمكن أن تحوي نفس العناصر في مواضيع متعددة.

س ـ هذا واضح. ولكني لم أفهم بعد: لماذا أصبح هذا مصدر سوء الفهم؟

ج ـ سوف تصل بنفسك إلى السبب وتقتنع به. ولكن يجب أولا أن نتعرف على الحالة التي تكون فيها المجموعتان متساويتين.

نقول إن المجموعتين سـ و ع متساويتان فيما إذا احتوت كل منهما على نفس العناصر.

س ـ هذا تعريف بسيط جدا.

ج ـ هذا صحيح. فالتعريف بسيط ومفهوم. ومع ذلك فلننظر معا إلى المثال التالي:

إذا أخذنا المجموعتين {ب، جـ ، د} و {ب، جـ ، د} واضح انهما

متساويتان. ويمكن ان نكتب التساوي بالشكل:

{ب، جـ ، د} = {ب، جـ ، د}

ولكن هل المجموعتان) (ب، جـ ، د) و (جـ ، د، ب) متساويتان؟

س ـ نعم. متساويتان ذلك أنهما تحويان نفس العناصر.

ج ـ هذا صحيح. المجموعتان متساويتان رغم أن العناصر ليست بنفس الترتيب فيهما، فنحن لم نقل أي شيء عن الترتيب عندما عرفنا تساوي المجموعات، والمهم فقط هو أن **تحوي المجموعتان نفس العناصر**، لذلك فإن:

{ب،جـ، د} = {جـ، د، ب}.

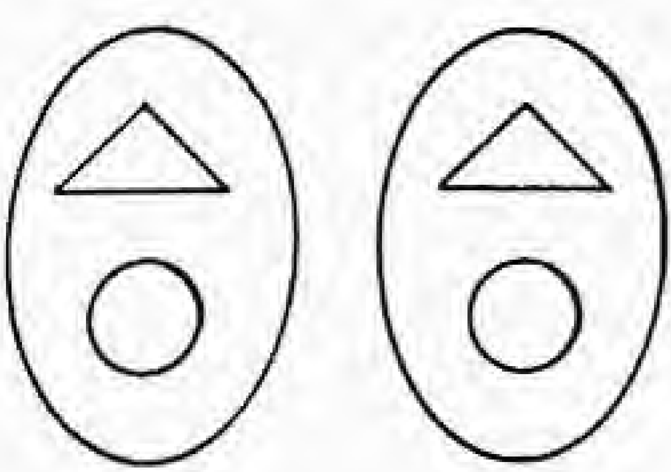
أما إذا أردت أن ترسم المجموعتين المتساويتين، فيجب أن تكون حذرا جدا لأنه تظهر باستمرار مشاكل أثناء ذلك و (سوء فهم) خصوصا في تلك الحالة التي تكون فيها معرفة الناس بنظرية المجموعات معرفة بسيطة وضعيفة، ويظنون أنهم يعرفونها جيدا (كأنهم مختصون) بها. وهنا يبدو «ذكاؤهم الخارق». صدقني لقد قرأت كثيرا من المقالات أو الموضوعات تحت العناوين التالية:

هل المثلث في المجموعة الأولى يساوي المثلث في المجموعة الثانية؟

هل الدائرة الصغيرة في المجموعة الأولى تساوي الدائرة في المجموعة الثانية؟

هل.....؟

في حين أنه لايمكن الحديث عن تساوي شكلين هندسيين عندما يوجد الشكلان في مجموعتين مختلفتين (كما هو موضح بالرسم)



هنا يمكن أن نتحدث فقط عن تطابق الأشكال الهندسية أو عن تكافئها.

(اي تساويها بالمساحة)، ولايمكن أبدا الحديث عن التساوي بين المثلثين كمجموعتين. فالتساوي يعني أن المجموعتين لهما نفس العناصر تماماوهذا هو سبب العلاقة السلبية بين الرياضيين ورسم المجموعات. وأعتقد أنهم محقون في ذلك.

أما إذا كنت شديد الرغبة برسم المجموعات فانصحك بأن ترمز لكل عنصر داخل المجموعة برمز يختلف عن العنصر الآخر حتى لاتخطىء.

والآن تستطيع أن ترسم عناصر مجموعة بشكل نقاط إذا احتجت لذلك: طالما أنك تعرف الآن أن كل العناصر مختلفة، وأن الرسم للتوضيح فقط وليس أكثر.. ولكن من الأفضل ألا نتحدث عن الأمثلة التي نستخدم فيها مجموعات عناصرها من الحياة مثل: تفاح، برتقال، صحون، كراسي، ومع ذلك فإن أحد «الاختصاصيين» لم يستطع أن يتقبل اعتبار العناصر المتماثلة كعنصر واحد ففسر ذلك كمايلي:

«في السينما كل الكراسي متماثلة، وهذا يعني أنه وفق نظرية المجموعات يوجد في السينما كرسي واحد فقط»، وهكذا فهو لم يفهم أنه لايوجد، من وجهة نظر الرياضيات، في العالم كله كرسيان متماثلان. والآن تستطيع أن تحكم بنفسك: أليس تساوي المجموعات منبعا لسوء الفهم؟

في الأمثلة:

{محمد، شادي، فادي} = {فادي، شادي، محمد}

{٢، ٣، ٥، ٨، ٩} = {٨، ٩، ٣، ٥، ٢}

لايوجد أي مشكلة. فالمساواة بين المجموعتين صحيحة.

والآن انتبه: هل المجموعتان {٣، ٤، ٣، ٥} و {٣، ٤، ٥} متساويتان؟

س ـ المجموعتان غير متساويتين، ذلك أن المجموعة الأولى فيها أربع عناصر وفي المجموعة الثانية يوجد ثلاث عناصر!

ج ـ ماهذا الذي تقوله؟ هل نسيت ماقلناه قبل قليل؟ لقد قلنا إنه لايوجد في المجموعة عناصر متشابهة، وإذا وجدنا عناصر متشابهة مكتوبة فإننا ننظر إليها وكأنها عنصر واحد ففي مثالنا لم يكن من الضروري تكرار العدد / ٣ / في المجموعة الأولى طالما أنه يؤلف عنصرا واحدا هو العدد / ٣ / لذلك فإننا نكتب:

{٣، ٤، ٥} = {٣، ٤، ٥}

س ـ هذا صحيح، وإن كان يبدو غريبا بعض الشيء ولكن هل هذا يعني أن {٢، ٢، ٢، ٢، ٢} = {٢}؟

ج ـ نعم إن {٢، ٢، ٢، ٢، ٢} = {٢}، وكذلك فإن {١، ١، ١، ١، ١، ١} = {١}

هل رأيت كيف يمكن أن تخطىء بسهولة إذا نسيت تعريف المجموعات المتساوية؟

المجموعة المحتواة في مجموعة أخرى:

أو المجموعة الجزئية:

س ـ ما هذه المجموعة الجديدة؟ وكيف يمكن أن نفهم أن مجموعة محتواة في مجموعة أخرى، أو أن مجموعة ع هي مجموعة جزئية من المجموعة س؟

ج ـ يمكننا أن نشبه هذا باستئجار شقة في المجموعة مثلا. «ولكن اخفض صوتك عند تكرار ذلك حتى لايسمع الرياضي هذا التشبيه».

س ـ ها.... ها.... ها.... هذا يعني أنه يوجد مشكلة سكن أيضا في المجموعات. هذا ممتع حقا. أريد أن أتعرف على هذا (الساكن). «وهل يدفع هذا الساكن أجرة للشقة»؟

ج ـ حسنا سوف تتعرف عليه الآن ـ ولكن عليك أن تعطيني مجموعة تريد أن تتعرف على ساكنها أو على مجموعتها الجزئية.

س ـ وهل يوجد في كل مجموعة «ساكن»؟ أي هل يوجد لكل مجموعة مجموعة جزئية؟

ج ـ نعم يوجد . . . وكلما كانت المجموعة أكبر «أي كلما كان عدد عناصرها أكبر» كلما كانت المجموعة الجزئية أكبر.

س ـ ولكني اعتقد أنه يوجد مجموعة ليس لها اي مجموعة جزئية!

ج ـ هذا غير صحيح. لايوجد مثل هذه المجموعة ـ ولكن ما المجموعة التي تقصدها أنت؟

س ـ المجموعة الخالية. وأنا اعتقد أنه لايمكن أن يكون لهذه المجموعة مجموعة جزئية أيضا.

ج ـ اعتقادك ـ للأسف ـ غير صحيح لأن المجموعة الخالية لها أيضا مجموعة جزئية.

س ـ وكيف يمكن أن يكون ذلك إذا كانت هي نفسها خالية؟

ج ـ لايوجد جدال في هذا الأمر. وأنا معك في أن هذه الحالة غير عادية بعض الشيء ولكن الرياضيين يؤكدون على مايلي:

«إن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية في كل مجموعة»

ومادامت المجموعة الخالية مجموعة كغيرها من المجموعات إذن لها مجموعة جزئية هي نفسها ـ المجموعة الخالية.

أجبني / أخيرا / هل وجدت مجموعة تريد ان تتعرف على مجموعة جزئية منها؟

س ـ لتكن مجموعة أيام الأسبوع.

ج ـ أنا موافق. لنكتب هذه المجموعة:

سـ = {السبت، الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة} ولنأخذ منها أيام الدوام في المدرسة:

ع = {السبت، الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس}.

س ـ هذا غير صحيح. فهناك بعض المدارس تعطل يوم الأحد.

ج ـ حسنا في هذه الحالة تكون أيام الدوام في المدرسة لهذه المدارس هي:

ص = {السبت، الإثنين، الثلاثاء، الاربعاء، الخميس، الجمعة}

ولننظر الآن إلى العلاقة التي تربط بين المجموعتين ع و ص والمجموعة الأصلية س من حيث العناصر في كل منهما.

س ـ هذاواضح مباشرة للعيان. إن كل عناصر المجموعتين ع و ص موجودة في المجموعة س.

ج ـ هذا صحيح وكل مجموعة تحقق هذه الخاصة ـ أو هذا المعيار ـ نسميها مجموعة جزئية للمجموعةس أي أنه: إذا كان كل عنصر من المجموعة ع عنصرا من المجموعة س فإننا نقول إن المجموعة ع مجموعة جزئية للمجموعة س: والرياضيون يستخدمون رمزاً خاصا للمجموعة الجزئية وهو:

⊇ففي مثالنا يكون:

ع ⊇ س و ص ⊇ س

س ـ وهل يمكن أن تكون مجموعة ما مجموعة جزئية لنفسها؟

ج ـ نعم هذا ممكن. فتعريف المجموعة الجزئية لايمنع من أن تكون مجموعة هي مجموعة جزئية لنفسها (هذا ما يعتمده الرياضيون على الأقل). وهكذا يكون:

س ⊇ س، ع ⊇ ع، ص ⊇ ص ويكون أيضا Φ ⊇ Φ

ومع ذلك فلكي نفرق بين هذه المجموعات (التي يمكن أن تكون مجموعة جزئية لنفسها) وبين المجموعات الجزئية الحقيقية....

س ـ وما المجموعة الجزئية الحقيقية؟

ج ـ إذا حوت المجموعة عنصرا واحدا على الأقل لاينتمي إلى المجموعة الجزئية، عندئذ ندعو هذه المجموعة الجزئية مجموعة جزئية حقيقية. ففي مثالنا يكون ع و ص مجموعتين جزئيتين حقيقيتين للمجموعة س لأن س تحوي عنصرا واحدا أكثر مما تحويه كل من ع و ص ونرمز عادة للمجموعة الجزئية الحقيقية بالرمز ⊃ اي يكون:

ع ⊃ س   ص ⊃ س

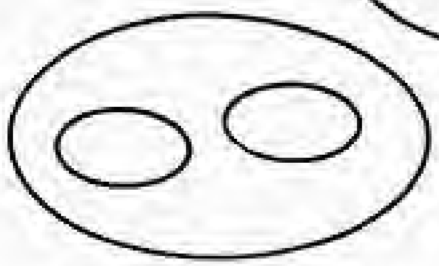
وعندما تكتب جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما يجب أن تنتبه جيدا حتى لاتنسى المجموعة الخالية.

س - حسن حسن لن أنسى المجموعة الخالية. ولكن بقي لدي سؤال آخر: كيف يمكن أن نمثل المجموعة الجزئية بالرسوم؟

ج - استغرب كيف لم تطرح هذا السؤال حتى الان؟

فانا أعلم أن اكثر شيء يعجبك في المجموعات هي الرسوم. ولكن طالما أنك سالت فسوف أوضح لك ذلك. تستطيع أن ترسم المجموعة الجزئية بالشكل التالي:

ولكن انظر معي الآن إلى الرسم التالي:



تلاحظ معي أنه من الصعب أن نحدد المقصود بهذا الرسم: ماذا يمثل هذا الرسم؟

هذا ما حذرني منه الأستاذ الذي حدثني عن تمثيل المجموعات بالرسوم، فهل نقصد بهذا الرسم تبيان مجموعتين جزئيتين للمجموعة الأصلية، أم المقصود به مجموعة مؤلفة من عنصرين وكل عنصر منهما مجموعة جزئية؟

وقد نجد من يعبر بهذا الرسم عن مجموعتين خاليتين.

وكل شخص يستطيع أن يؤكد أنه يعبر في هذا الرسم عن ذلك الشيء أو المفهوم الذي يفكر فيه. وبصورة أدق، كل شخص يعبر عن ذلك الشيء، أو المفهوم الذي فكر فيه وهو يرسم، وأنت لن تستطيع أن تقنع أحدا منهم أن مايوجد في الرسم هو شيء آخر يختلف عما فكروا به.

س - ماالحد الأقصى لعدد المجموعات الجزئية لمجموعة ما؟

ج - إن عدد المجموعات الجزئية لمجموعة ما يرتبط بعدد عناصر المجموعة نفسها. وكلما كان عدد العناصر أكبر في المجموعة، كلما كان هناك عدد أكبر من المجموعات الجزئية.

وإذا أردت أن تكتب جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما فإن أفضل طريقة لذلك هي التالي:

تكتب أولا المجموعة الخالية (ذلك أنها مجموعة جزئية في أي مجموعة)، ثم تكتب كل المجموعات الجزئية التي تتألف كل منها من عنصر وحيد، ثم كل المجموعات الجزئية التي يوجد في كل واحدة منها عنصران وهكذا....

وأخيرا تكتب المجموعة نفسها والتي نفهمها على أنها مجموعة جزئية من نفسها.

وإليك هذا المثال:

إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر:

سـ = {ب، جـ ، د} فإن المجموعات الجزئية للمجموعة سـ هي: Φ ، {ب}، {جـ} ، {د}، {ب، جـ} ، {جـ،د}، {ب، د}، {ب، جـ ،د} وعدد هذه المجموعات الجزئية ثمان.

هذا صحيح. فهذه هي كل المجموعات الجزئية لهذه المجموعات س وهي أكثر مما تصورت.

ج ـ لنر الآن كيف يمكن أن ننشىء مجموعة جديدة باستخدام مجموعات معروفة.

س ـ وهل هذا الأمر ممكن؟

ج ـ ولم لا؟ وهنا سوف نتصرف تماما كما في الأعداد.

فكيف كان الأمر بالنسبة للأعداد؟ أي كيف انشأنا أعدادا جديدة باستخدام أعداد معروفة؟

نحن نعلم أن الأعداد يمكن أن نجمعها أو نضربها أو نطرحها أو.... وعندما نقوم بإحدى هذه العمليات على عددين فإننا نحصل على عددجديد.

س ـ وهل هذا يعني أنه يمكن أن نجمع مجموعتين ونحصل على مجموعة جديدة؟

ج ـ نعم يمكن القيام بعمليات مشابهة على المجموعات، ولكن تسمية العمليات على المجموعات تختلف بعض الشيء مع أنها لاتختلف كثيرا في خواصها عن العمليات على الأعداد.

س ـ وما هذه العمليات؟
ج ـ العمليات على المجموعات هي : التقاطع ، الاجتماع ، (الاتحاد)، المتممة.
س ـ وهل نستخدم لهذه العمليات رموزا خاصة بها؟
ج ـ طبعا. وسوف نتعرف فيما يلي على هذه العمليات وخواصها الأساسية.

تقاطع المجموعات :

س ـ هل سمعت سابقا كلمة تقاطع؟ وأين سمعتها؟.
ج ـ نعم سمعت هذه الكلمة. ولكني سمعتها في الهندسة. ففي الهندسة نتحدث عن تقاطع مستقيمين. اعتقد أنها تحمل نفس المفهوم بالنسبة للمجموعات.
س ـ هذا صحيح. ولكن كيف نجد مكان تقاطع مستقيمين في المستوى؟
ج ـ نقطة التقاطع هي النقطة المشتركة بين المستقيمين.
س ـ هذا صحيح. ولكن قل لي: إلى أي مستقيم تنتمي هذه النقطة؟
ج ـ نقطة التقاطع تنتمي لكلا المستقيمين، طالما أن الحديث يدور حول النقطة المشتركة بينهما.
ج ـ هذا صحيح. وهو صحيح أيضا في المجموعات. فتقاطع مجموعتين هو المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بينهما. ثم إن هذين المستقيمين يمكن اعتبارهما مجموعتين من النقاط، ونقول إن المستقيم له بناء نقطي، وتقاطع المستقيمين هو المجموعة المؤلفة من النقاط المشتركة بينهما، وطالما أن الحديث يدور هنا حول نقطة تقاطع وحيدة، فإن مجموعة التقاطع في هذه الحالة هي مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة.
لننظر الآن إلى المجموعتين:
س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}   ع = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}
س ـ هل تعرف أين تتقاطع هاتان المجموعتان؟ ما العناصر المشتركة بينهما؟
ج ـ ان العناصر المشتركة بين المجموعتين س و ع هي : ٥ ، ٦
ج ـ إذن تقاطع هاتين المجموعتين هو: . . . .
س ـ هو المجموعة {٥،٦}

ج ـ هذا صحيح ها أنت ذا قد تعلمت شيئا جديدا عن المجموعات. وهكذا نعرف التقاطع كما يلي:

إن تقاطع المجموعتين سـ، ع هو المجموعة المؤلفة من تلك العناصر، وفقط تلك العناصر، التي تنتمي إلى المجموعة سـ والمجموعة ع في وقت واحد (أنا مضطر هنا لكتابة العبارة: «.... من تلك العناصر وفقط تلك العناصر......» حتى لايغضب مني الرياضيون طالما أنهم يؤكدون على أننا يجب أن نعبر عن التقاطع تماما بهذا الشكل) وهكذا فعندما نقول: ...... تلك العناصر وفقط تلك العناصر... فإننا نعني بذلك أننا نأخذ عناصر محددة تماما، ولانأخذ أي عنصر آخر غيرها.

س ـ وكيف نرمز لتقاطع المجموعات؟

ج ـ ذكرتني بالرمز فشكرا لك. لقد كدت أنسى الحديث عنه.

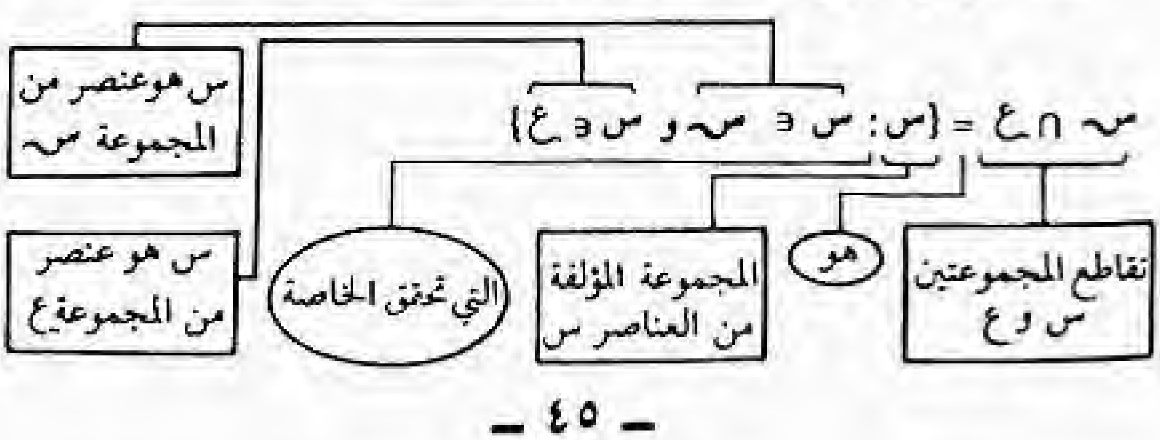
إن رمز التقاطع يشبه الحرف اللاتيني الكبير U ولكنه مقلوب إلى الأسفل هل ترى؟ إن الرياضيين لم تكفهم الرموز فتحولوا إلى الأحرف ليقلبوها. ترى ما الزمن الذي استغرقوه في التفكير حتى توصلوا إلى هذه الفكرة للرمز؟؟».

وهكذا فإن رمز التقاطع هو: $\cap$

والآن انظر كيف نكتب عبارة التقاطع «بالاختزال الرياضي»

سـ ∩ ع = {س: س ∈ سـ و س ∈ ع}

أعترف أن هذه الكتابة تبدو مزخرفة إلى أبعد الحدود مع ذلك لنحاول أن نترجم هذه «الزخرفة» إلى لغة الأحياء العادية نجد:



أما إذا سألك أحد الرياضيين «ما تقاطع المجموعتين سـ وعـ ؟» فإنك تستطيع أن تكتب له، بصمت، العبارة التالية :

سـ ∩ عـ = {س: س ∈ سـ و س ∈ عـ}

وأنا واثق أنه سيكون مسرورا جدامن إجابتك، رغم أن هذه الكتابة تبدو لك غريبة بعض الشيء، وليست منطقية تماما.

ولكن الرياضيين يؤكدون على أن لغة الرموز أكثر دقة من لغتنا التي نتحدث بها، وأن الكلمات الكثيرة غالبا ماتشوش المعنى الذي نريده «نتذكر هنا، وبهذه المناسبة، الكثير من المعارف الذين يقولون كلمات كثيرة دون أن نفهم ماذا يريدون من ورائها».

لنلاحظ أيضا أنه لاأهمية للترتيب في كتابة المجموعات لدى تقاطعها أي أن:

سـ ∩ عـ = عـ ∩ سـ

س ـ وهل يمكن أن يحدث عند تقاطع مجموعتين الا نجد أي عنصر مشترك بينهما؟

ج ـ طبعا هذا ممكن. واليك هذا المثال:

ص = {٢، ٤، ٦} ق = {١، ٣، ٥}

وبما أن هاتين المجموعتين ليس بينهما أي عنصر مشترك فإن تقاطعهما هو المجموعة الخالية ونكتب:

ص ∩ ق = Φ

ومع أن المجموعة الخالية تعني هنا أنه لايوجد أي عنصر في مجموعة التقاطع، فالمجموعة الخالية نفسها موجودة.

س ـ ومع ذلك فأنا أجد صعوبة في تصور وجود مثل هذه المجموعة ـ المجموعة الخالية ـ.

ج ـ إن المجموعة الخالية ليست موجودة فقط، وإنما تشغل مكانا مرموقا في المجموعات، ومع ذلك فهي تخلق ـ أحيانا ـ شيئا من التشوش والبلبلة، وخاصة مع الرياضيين الجدد.

س ـ وما سبب هذا التشوش والبلبلة؟

ج ـ السبب هو أن هذه المجموعة لاتحوي أي عناصر.

إضافة لذلك فإن هذه المجموعة لها بعض الصفات المشوقة وانطلاقا من هذه الصفات نستطيع أن نشكل عددا من المجموعات الجديدة المختلفة.

س ـ كيف يمكن أن نشكل مثل هذه المجموعات اذا كان يوجد فقط مجموعة خالية واحدة؟ ثم كيف يمكن أن نشكل من «الخالية» شيئا ما؟

ج ـ هذا ممكن وسوف ترى كيف نقوم بذلك إذا وجد أشخاص يستطيعون بناء نظريةمن كلمات فارغة، ويستطيعـون كتابـة بحث علمي منها، فلمـاذا لايستطيع الرياضيون بناء عنصر ما رياضي من المجموعة الخالية؟؟»

لنبدأ بالمجموعة Φ ثم ننشيء المجموعة التي تحوي عنصرا وحيدا هو المجموعة الخالية أي {Φ}

والمجموعة التالية ننشئها من هاتين المجموعتين أي {Φ، {Φ}}. وهكذا فقد حصلنا على مجموعة مؤلفة من عنصرين: العنصر الأول هو المجموعة الخالية، والعنصر الثاني هوالمجموعة المؤلفةمن العنصر الوحيد Φ

المجموعة الخالية. وهكذا فقد حصلنا على ثلاث مجموعات.

والان يمكن أن نجد المجموعة الرابعة: {Φ {Φ} {Φ {Φ}}}

وإذا تابعنا هذه العملية لإنشاء المجموعات، بحيث أن كل مجموعة جديدة تحوي جميع المجموعات السابقة لها، عندئذ يمكن أن نحصل على سلسلة لانهائية من المجموعات المختلفة فيما بينها، وبهذا الشكل أنشأنا واحدا من اظرف السلاسل في نربة المجموعات، وكل عناصر هذه السلسلة نتجت من المجموعة الخالية. هل رأيت كم هي مهمة هذه المجموعة الخالية؟

س ـ اعترف لك أنني لم أتوقع هذا من «الفراغ»

إذن فقد تعرفنا على كل شيء عن تقاطع المجموعات وعن المجموعة الخالية.

ج ـ حسنا. إذا كنت قد فهمت كل ماقلته لك بهذا الموضوع فأجبني على السؤال التالي:

مانانج تقاطع مجموعة غير خالية ومجموعة خالية؟

س ـ إن تقاطع المجموعة الخالية مع مجموعة غير خالية يعطي . . . . .
ولكن كيف يمكن أن نقاطع المجموعة الخالية مع أي مجموعة أخرى؟

ج ـ إن تقاطع مجموعة خالية مع مجموعة غير خالية يتم ببساطة متناهية. فالمجموعة الخالية ـ كما نعلم ـ هي أيضا مجموعة ككل المجموعات، وتقاطع مجموعتين (حسب التعريف) هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التي تنتمي للمجموعتين الأولى والثانية. من هنا نستنتج أن تقاطع أي مجموعة مع المجموعة الخالية هو. . . .

س ـ هو المجموعة الخالية.

ج ـ أحسنت. هذا صحيح. وكيف تكتب هذا التقاطع؟

س ـ اكتبه بهذا الشكل: $Φ = Φ ∩$ سـ

ج ـ هذا شيء جميل، فقد كتبتها بشكل جيد. إذن فقد استوعبت عملية التقاطع بسرعة، سأعطيك سؤالا آخر. ماذا نعني بالكتابة سـ ∩ سـ أي: تقاطع المجموعة مع نفسها؟

س ـ إن تقاطع سـ مع سـ يعطي المجموعة سـ

ج ـ ولماذا؟

س ـ لأن مجموعة التقاطع يجب أن تحوي عناصر المجموعة الأولى المشتركة مع عناصر المجموعة الثانية. فإذا كانت المجموعتان متماثلتين فإن التقاطع يصبح إحدى المجموعتين.

ج ـ وهل تستطيع أن توضح لي ذلك بمثال؟

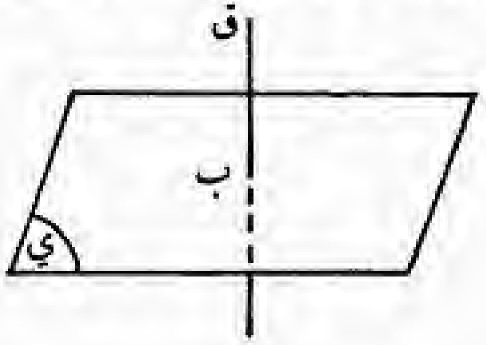
س ـ نعم. وهذا بسيط جدا. إذا كان لدينا المجموعة:

ع = {١، ٢، ٣} عندئذ
{١، ٢، ٣} ∩ {١، ٢، ٣} = {١، ٢، ٣} أو ع ∩ ع = ع

ج ـ (اعتقد أنه بعد بضعة دروس سوف تبدأ أنت بتعليمي. لقد اعتقدت خطأ أنك لن تتعلم مني أبدا، ولن تجيبني على أي سؤال. وها أنت ذا تعطي الإجابة الصحيحة والكاملة مدعمة بالأمثلة!!) جيد. إن كل ما كتبته صحيح. وإذا تابعت معي بهذا الشكل فسوف تبدأ بالكتابة والحديث بواسطة الصياغات الرمزية فقط. وهكذا آمل أن تكون قد حفظت أن **تقاطع مجموعتين هو مجموعة**.

س ـ طبعا. وهل يمكن أن يكون تقاطع مجموعتين شيئا آخر؟

ج ـ لا لا. أنا اكرر فقط لكي لاتنسى، وسوف أكون سعيدا جدا إذا ثبتت هذه الموضوعة تماما في ذاكرتك.



سأطرح عليك سؤالا آخر: انظر إلى الرسم المقابل تجد مستقيما ق ومستويا ي. ما تقاطع هاتين المجموعتين؟

لنتذكر هنا أننا نعتبر ي، ق مجموعتين من النقاط، مع أننا لانضعهما ضمن قوسين.

س ـ هل تظن أن هذا السؤال صعب جدا؟. واضح أن تقاطع المجموعتين هو النقطة ب بالطبع.

ج ـ وكيف تكتب هذا؟

س ـ هذا سهل. اكتب التقاطع بالشكل.

ي $\cap$ ق = ب

ج ـ هذا تماما ماتوقعته. إن إجابتك غير صحيحة، وكتابتك أيضا غير صحيحة.

س ـ ولماذا غير صحيحة؟ وأين الخطأ؟

ج ـ لقد أخبرتك سابقا، وأكرر لك الآن: **أن تقاطع مجموعتين هو مجموعة** أليس كذلك؟ما النقطة ب؟

س ـ النقطة ب هي عنصر من المجموعتين.

ج ـ أما إجابتك فتعني: أن تقاطع مجموعتين (ي ∩ ق) هو عنصر وليس مجموعة.

س ـ ولكن....

ج ـ لاأريد ولكن... لقد عبرت عن التقاطع بشكل غير صحيح، ثم كتبت التقاطع بشكل غير صحيح أيضا.

س ـ إذن كان يجب أن أقول «إن تقاطع المستقيم ق مع المستوى ي هو المجموعة المؤلفة من العنصر الوحيد ب أي {ب}.

ج ـ نعم. هذه هي العبارة الصحيحة للإجابة. وهذه العبارة تكتب رمزيا بالشكل: ي ∩ ق = {ب}.

س ـ سوف أحفظ هذا التقاطع جيدا... وهذا وعد مني.

ج ـ وأنا مسرور لذلك.

(ماذا حدث لمحدثي؟ لقد نسي أن يسألني عن تمثيل تقاطع مجموعتين بالرسوم. هذا غير مهم الآن. عندما انتهي من الحديث حول الاجتماع (الاتحاد) والمتممة سوف أشرح له بنفسي كيف تمثل العمليات على المجموعات بالرسوم).

ومع ذلك، فقبل أن نفترق أريد أن أسألك سؤالا أخيرا وعليك أن تفكر به جيدا، وتجيبني عليه في لقائنا التالي.

س ـ سأجيب عليه بكل سرور. ماهذا السؤال؟

ج ـ هل تقاطع المستوى والمستقيم هو مجموعة مؤلفة من نقطة وحيدة دوما ومهما كان وضع المستقيم والمستوى؟

(إذا لم تعرف الإجابة عزيزي القارىء فسوف تجد الإجابة الصحيحة في نهاية هذا الكتاب. وتجد الإجابة على كل سؤال مرقم بهذا الشكل في قسم: حلول واجابات).

اجتماع (اتحاد) المجموعات:

ج ـ لنتعرف الآن على عملية اجتماع (اتحاد) المجموعات.

إن إشارة الاجتماع (الاتحاد) تشبه الحرف اللاتيني الكبير U وتبدو كما يلي: U

س ـ وكيف نعرف اجتماع مجموعتين؟

ج ـ سوف أوضح لك ذلك بالأمثلة. وبعد ذلك نصوغ التعريف ثم نتعرف على كيفية كتابة الاجتماع باستخدام الرموز. لنبدأ بمجموعتين اختباريتين:

س = {١، ٢، ٣، ٤} ع = {٥، ٦، ٧}

اجتماع هاتين المجموعتين هي المجموعة:

س U ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

ج ـ هذا بسيط جدا تماما كما لو أننا جمعنا هاتين المجموعتين.

ج ـ أنت على حق. ونحن أحيانا نستخدم كلمة (جمع) بدل كلمة «اجتماع» مجموعتين، ولكننا مع ذلك لانرغب في استخدام كلمة «جمع» لأن ـ كما تلاحظ ـ هذا ليس جمعا عاديا للعناصر.

لنأخذ مثالا آخر.

إذا كان لدينا المجموعتان:

ق = {ب، جـ، د، هـ} ك = {ن، م، د، هـ، ل}

فكيف نجد اجتماع هاتين المجموعتين؟

س ـ إن اجتماع (اتحاد) هاتين المجموعتين هو المجموعة:

{ب، جـ، د، هـ، ن، م، د، هـ، ل}

ج ـ ولماذا كتبت العنصرين د، هـ مرتين في المجموعة؟

هل نسيت أنه يجب ألا تكتب العنصر إلا مرة واحدة في المجموعة؟

لقد ذكرنا ذلك عندما تحدثنا عن تساوي مجموعتين.

س ـ آه.... نعم هذا صحيح. لقد نسيت ذلك.

إذن اجتماع (اتحاد) المجموعتين ق، ك يكون:

ق ∪ ك = {ب، جـ، د، هـ، ن، م، ل}

س ـ هل كتابتي صحيحة؟

ج ـ نعم صحيحة. والآن تستطيع أن تعطيني تعريف الاجتماع.

س ـ ماهو اجتماع (اتحاد) مجموعتين؟

ج ـ اجتماع (اتحاد) مجموعتين هو المجموعة المؤلفة من جميع عناصر هاتين المجموعتين.

ج ـ هذا صحيح. والرياضيات تصوغ هذا التعريف بشكل اكثر دقة كما يلي:

«إن اجتماع (اتحاد) المجموعتين سـ، ع هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين سـ، ع على الأقل».

ج ـ نعم. لقد فكرت أنا أيضا وفهمت الاجتماع بهذاالشكل.

ج ـ ولكنك لم تذكر التعريف بهذا الشكل. والآن سوف أكتب لك هذا التعريف كما يكتبه الرياضيون:

سـ ∪ ع = {س: س ∈ سـ أو س ∈ ع}

س ـ هل تستطيع أن تقرأ هذه الصيغة؟

ج ـ نعم أستطيع: قراءتها

اجتماع المجموعتين سـ و ع هو المجموعة المؤلفة من جميع العناصر س التي تحقق الخاصة: س هي عنصر من المجموعة سـ أو س هي عنصر من المجموعة ع.

ج ـ إجابتك ممتازة وأنا أهنئك على ذلك.

إذن فعندما تريد أن تحصل على اجتماع مجموعتين تستطيع أن تطبق هذا التعريف ولن تخطىء أبدا في ايجاد الاجتماع.

س ـ ومع ذلك فأنا لم أدرك الفرق بين الجمع والاجتماع فما الفرق بينهما؟

ج ـ إن الجمع هو عملية على الأعداد. أما الاجتماع(الاتحاد)فهو عملية على المجموعات،والعمليتان غير متماثلتين. قارن مثلا حاصل جمع عددين صحيحين موجبين مع عدد عناصر مجموعة الاجتماع لمجموعتين وسوف

تتأكد من الاختلاف بينهما بنفسك.

فنحن نعلم أنه لدى جمع عددين صحيحين موجبين: يكون حاصل الجمع دائما أكبر من كلاالعددين المجموعين مثلا:

٣ + ٤ = ٧ والعدد ٧ أكبر من العدد ٣ واكبر من ٤.

س ـ وهل هذا ما نلاحظه عند اجتماع مجموعتين؟

ج ـ من الممكن أن نجد نفس الملاحظة. ولكن لايشترط ذلك. أي أن هذه الملاحظة ليست صحيحة دائما في حالة اجتماع مجموعتين. ففي المثال الأول كانت س مؤلفة من أربعة عناصر، ع مؤلفة من ثلاثة عناصر، وعدد عناصر مجموعة الاجتماع هو. . . . .

س ـ عدد عناصر مجموعة الاجتماع هو سبعة عناصر.

ج ـ هذا صحيح ـ ولكن لننظر إلى المثال التالي:

في المجموعة ق يوجد أربعة عناصر، وفي المجموعة ك يوجد خمسة عناصر فما عدد عناصر مجموعة الاجتماع ق U ك؟

س ـ في مجموعة الاجتماع ق U ك سبعة عناصر فقط. هذا غريب حقا.

ج ـ اذن. عندما لم يكن للمجموعتين عناصر مشتركة ـ أي عندما كانت المجموعتان منفصلتين ـ فإن عدد عناصر الاجتماع يساوي مجموع عناصر المجموعتين. أما في الحالات الأخرى فإن عدد عناصر مجموعة الاجتماع يكون أقل من مجموع عناصر المجموعتين.

ج ـ هذا صحيح وواضح.

ج ـ انظر الآن إلى اجتماع المجموعة مع نفسها.

س ـ إذا كانت س = (١، ٢، ٣، ٤) فإن

س U س = (١، ٢، ٣، ٤) U (١، ٢، ٣، ٤) = (١، ٢، ٣، ٤)

ج ـ هذا صحيح لنر الآن ما اجتماع أي مجموعة مع مجموعة جزئية منها. مثلا اذا كان لدينا المجموعتان:

ع = {ا، ب، جـ، د، هـ، ل} ص = {ب، جـ، د}

ما اجتماع المجموعتين ع مع ص (واضح هنا ان ص ⊂ ع)؟

س - ان اجتماع هاتين المجموعتين هو المجموعة:

ع ∪ ص = {ا، ب، جـ، د، هـ، ل}

ولكن هذه هي المجموعة ع نفسها!!

ج - نعم. هذا صحيح. إذا كان ص ⊆ ع فإن: ع ∪ ص = ع

س - حقا إن لعملية الاجتماع خواص ممتعة. ولكن ألا يتغير الاجتماع إذا بدلنا موضعي المجموعتين؟

ج - لايتغير الاجتماع اذا بدلنا موضعي المجموعتين فمن أجل أي مجموعتين:

س و ع يكون: س ∪ ع = ع ∪ س

ونقول إن اجتماع المجموعات هو عملية تبديلية (تستطيع أن تتأكد من ذلك بنفسك من الأمثلة السابقة).

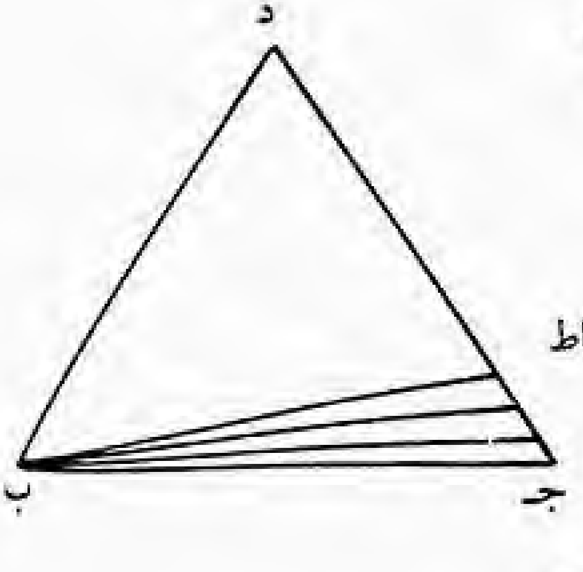
س - وهل نستخدم اجتماع المجموعات أيضا في الهندسة؟

ج - طبعا وباستخدام المجموعات يمكن أن نعرف - وبشكل - أكثر وضوحا مختلف الأشكال الهندسية. مثل المثلث والدائرة وغيرهما.

س - نعرف الأشكال الهندسية باستخدام المجموعات؟ وكيف يكون ذلك؟

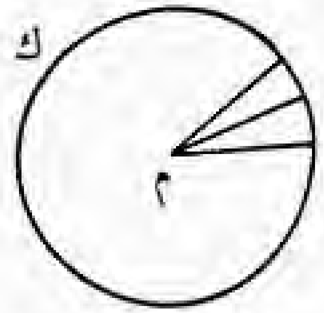
ج - لنأخذ مثلا تعريف المثلث (باعتباره مجموعة نقاط في المستوى) نأخذ ثلاث نقاط في المستوى ليست على استقامة واحدة ب، جـ، د نصل جـ د.

نعرف المثلث كما يلي:



المثلث ب جـ د هو اجتماع مجموعة نقاط كل القطع المستقيمة التي بدايتها في النقطة ب ونهايتها على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

بنفس الشكل يمكن أن نعرف الدائرة :
فالدائرة هي اجتماع مجموعة نقاط كل القطع المستقيمة التي بدايتها النقطة م ونهايتها تقع على الخط الدائري ك *



متممة مجموعة :

ج ـ بعد أن تعرفنا على تقاطع واجتماع المجموعات، نعرف الآن متممة مجموعة أو الفرق بين مجموعتين، وذلك من خلال اللعب بالمجموعات .

س ـ إذا كان الأمر سيتم باللعب فليس لدي مانع .

ج ـ سوف ترى ذلك بنفسك . سوف أكتب الفرق بين مجموعتين، ويكفي أن تنظر إليه لكي تعرف كيف حصلت عليه .

ولكن قبل البدء لابد من أن نتعرف على رمز المتممة .

إن رمز المتممة ** أو الفرق بين مجموعتين يشبه رمز الطرح المعروف ولكنه مكتوب بشكل مائل اي : /

ج ـ حسن ـ لقد حفظت ذلك .

ج ـ لنأخذ الآن المجموعتين :

س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ع = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

الفرق بينهما سيكون :

{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} / {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} = {١ ، ٢ ، ٣}

او س / ع = {١ ، ٢ ، ٣}

س ـ هل فهمت كيف حصلنا على هذه المجموعة الجديدة ـ مجموعة الفرق؟

---

* يختلف هذا التعريف مع ما درجنا عليه في الكويت، إذ نعرف الدائرة كمجموعة نهايات القطعة المستقيمة التي لها نفس الطول ونقطة البدء م . أما التعريف هنا فينطبق على «المنطقة الدائرية» .

[المحرر]

** ينطبق هذا التعريف على «المتممة النسبية» حسبما درجنا عليه هنا .

[المحرر]

ج ـ بكل تأكيد فهمت. لقد حصلنا عليها بأخذ عناصر المجموعة الأولى التي لاتنتمي للمجموعة الثانية.

ج ـ هذا صحيح ـ لقد أدركت أنك سوف تفهم هذا بسرعة.

س ـ وهل تعطي الرياضيات هذا التعريف نفسه لفرق مجموعتين؟

ج ـ أرى أنك قد أصبحت حذرا جدا. تريد أن تعرف كيف يصوغ الرياضي تعريف المتممة. التعريف هو:

الفرق بين مجموعتين او متممة مجموعة ع إلى مجموعة سـ أو سـ / ع هي المجموعة المؤلفة من العناصر التي تنتمي للمجموعة س ولاتنتمي للمجموعة ع.

ج ـ لاأصدق أن الرياضي يعطي مثل هذا التعريف.

س ـ ماذا تقول؟ ألا تصدق؟ ولماذا؟

(ترى هل أخطأت أنا في التعريف؟.... لالم أخطىء. اذن ماذا يقصد بكلامه؟)

ج ـ إن الرياضي سوف يكتب التعريف بواسطة الرموز.

ج ـ (آه... هذا صحيح تماما. الحق معه.. ولكن انتظر وسوف أطرح عليك سؤالا ستتجنب بعده أن تقول إنك لاتصدقني).

س ـ وهل تعرف كيف يكتب الرياضي هذا التعريف؟

ج ـ نعم أعرف ـ وهذا بسيط جدا. إنه يكتبه بالشكل:

سـ/ع = (س: س ∈ سـ و س ∉ ع)

س ـ (اجابته صحيحة) وكيف عرفت ذلك؟ هل رأيت هذا التعريف في مكان ماقبل الآن؟

ج ـ لا. لم أر هذا التعريف سابقا في أي مكان. ولكني نظرت مرة أخرى إلى تعريف الاجتماع (الاتحاد) ثم قرأت تعريف المتممة، وعرفت كيف نكتب الفرق بالرموز.

ج ـ (هذه عملية تركيب جيدة: لقد استخدم ماهو معروف لديه حتى الآن، ثم ربطه مع معارفه عن الموضوع الذي يدرسه الآن وهكذا استوعب

الموضوع الجديد الذي يدرسه جيدا)
اقرأ لي الآن ما كتبته رمزيا.

س - يمكنني أن اقرأ الصيغة الرمزية كما يلي:
فرق المجموعتين س و ع هو المجموعة المؤلفة من كل العناصر س التي تحقق الخاصة: س هو عنصر من المجموعة س وليس عنصرا من المجموعة ع.

ج - إجابتك ممتازة. وأنا أعترف أنك قد أدهشتني بمعلوماتك الصحيحة.
(لا أدري كيف استوعب الموضوع بهذه السرعة، كما لو أنه أكثر وعيا وذكاء من أبناء جيلنا. هل كان هذا نتيجة استخدام هذا الجيل لنوع معين من الفيتامينات؟ سوف أسأل طبيبي عن ذلك عندما أراجعه من أجل الروماتيزم الذي أصابني).

حسن. وبعد أن عرفت الآن فرق المجموعتين سـ/ ع حاول أن نجد ع / سـ.
س - حسنا. ولكن سوف اكتب أولا هاتين المجموعتين:
سـ = (١، ٢، ٣، ٤، ٥) ع = (٤، ٥، ٦، ٧) عندئذ
ع/سـ = (٤، ٥، ٦، ٧) / (١، ٢، ٤، ٤، ٥) = (٦، ٧)
ج - هذا صحيح.
س - هل تستطيع أن تلاحظ شيئا ما بمقارنة سـ/ ع و ع /سـ؟.
ج - نعم. ألاحظ أن: سـ/ ع ع / سـ
وهذا يعني أنه عند طرح مجموعتين لايمكن أن نبدل أماكنها.

ج - صحيح. إذن في حالة طرح المجموعات لاتصبح الخاصة التبديلة. أي أن الطرح في المجموعات عملية غير تبديلية.
إليك الآن سؤالا آخر ولكن عليك أن تفكر به جيدا قبل أن تجيب عليه:
٢*- في أي حالة يكون عدد عناصر مجموعة الفرق سـ/ ع مساويا للفرق بين عدد عناصر المجموعتين سـ، ع؟

• الأسئلة المرقمة بالأرقام (١، ٢، ٣، ٤) نجد اجاباتها في نهاية الكتاب في قسم حلول وإجابات.

س ـ آه. هذا سؤال صعب. سوف أجيب عليه وأنا أكتب الوظيفة البيتية أما الآن فقد شعرت ببعض التعب.

ج ـ حسن. أنا أصدقك. اذهب والعب. مع ذلك فلا تنس هذه المسألة.

ج ـ أعتقد أنني لن أنساها.

(والآن سوف أشكل مع أصدقائي مجموعتين من اللاعبين، وترى من الأفضل أن تكونا في لعبة كرة القدم. ولكن أين الكرة؟ ترى هل تحولت إلى «مجموعة خالية»؟. . . . لاها هي الكرة. . . لأذهب والعب)

التطبيق أو «التوصيل» أو «تصوير المجموعات»

س ـ ها ـ ها ـ ها. . . . وهل المجموعات وثيقة لكي تصورها؟

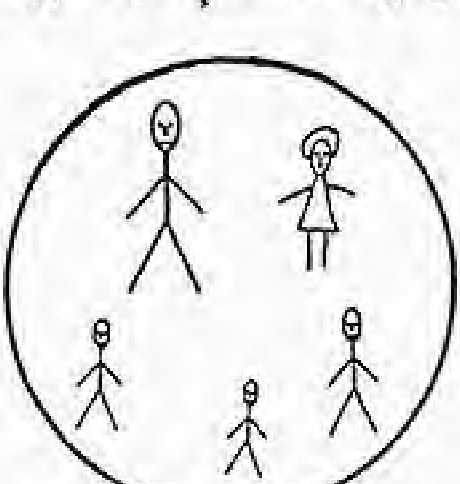
ج ـ ها أنت ذا تمزح مرة ثانية، وأنا أحاول بجدية أن أعرفك على واحد من أهم مفاهيم الرياضيات الحديثة والتي تعتبر حجر الأساس لها. فمفهوم التطبيق، والمحمول إلى الرياضيات في الحياة اليومية. . . .

س ـ وما علاقة التطبيق هنا مادام الحديث يدور حول «تصوير»؟

ج ـ هناك أيضا مصطلحات أخرى غير «التصوير» فهناك «التوصيل»، أو «النقل»، أو «استحواذ» وكلها تنتمي لنفس المفهوم والذي نطلق عليه غالبا اسم «التطبيق في المجموعات».

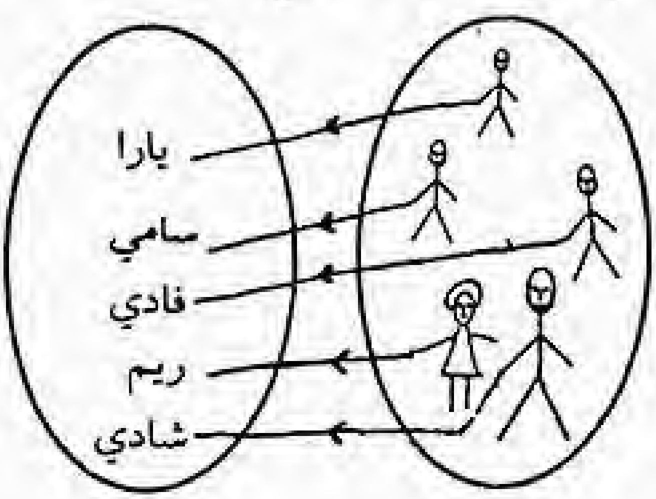
س ـ وماذا نعني بهذا المصطلح؟

ج ـ قد يكون من الأفضل أن نبدأ بالأمثلة وسوف نجد الإجابة على كل التساؤلات.



ليكن هناك مجموعة من الأولاد. وسوف أرسمهم لك كما يفعل الأولاد عادة:
(وإن كنت لاأجيد الرسم) نحن نعلم طبعا أن لكل ولد اسما نناديه به. أي أن لكل ولد اسما معينا. ولكن الأسماء التي نناديهم بها هي: شادي، فادي، يارا، ريم، سامي.

إذن فلكل طفل اسم. ويمكن ان نرسم هذه العملية بالشكل:



اي نوصل بين كل طفل واسمه او نربط كل طفل باسمه كما في الشكل:

اي ربطنا يد كل طفل باسمه. هذه العملية كلها تسمى تطبيقا. ذلك أننا طابقنا أو (وصلنا) بين كل طفل واسمه. اي طابقنا بين عناصر المجموعة الأولى والمجموعة الثانية.

لنأخذ - كمثال آخر - هذا الكتاب. إن صفحات هذا الكتاب يمكن اعتبارها عناصر لمجموعة أولى، وارقام هذه الصفحات ١، ٢، ٣. . . . . نعتبرها عناصر لمجموعة ثانية. إن كل صفحة من صفحات الكتاب قد خصص لها رقم معين. إذن فعناصر المجموعة الأولى يمكن أن نوصلها بعناصر المجموعة الثانية، أو يمكن أن نجد تطبيقا بينهما (بشكل يشابه الشكل السابق تماما).

لنأخذ كمثال ثالث مجموعة طلاب مدرستك ومجموعة الصفوف فيها. إن كل طالب في المدرسة يدرس في أحد الصفوف - هنا أيضا يوجد تطبيق بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية: يمكن أن نوصل (او ننقل) كل طالب إلى الصف الذي يدرس فيه. وأنا متأكد أنك تستطيع بمفردك أن تعطي عددا من الأمثلة على التطبيق مثلا:

تطبيق بين مجموعة الدول ومجموعة عواصمها.

والآن أخبرني: ما الذي يجمع بين هذه الأمثلة المختلفة؟ أو بماذا تتميز هذه الأمثلة المختلفة؟

ج - مايجمع هذه الأمثلة هو أنه في كل مثال منها يدور الحديث حول مجموعتين، واسهم تصل بين عناصر المجموعتين.

س ـ هذا صحيح . ولنسم المجموعة الأولى : مجموعة الانطلاق (التي تنطلق منها الأسهم)، والمجموعة الثانية مجموعة الاستقرار (التي تستقر فيها الأسهم)، (أو نسميها المنطلق أو المجال والمستقر أو المجال المقابل) . إضافة لما ذكرته أنت يوجد في كل مثال قاعدة معينة تسمح لنا بتطبيق إحدى المجموعتين على الثانية، أي توجد قاعدة لربط عناصر إحدى المجموعتين بعناصر المجموعة الثانية . هل فهمت الآن ما التطبيق؟ .

ج ـ نعم . فهمته جيدا (هل تعتبرني غبيا إلى درجة أنني لا أفهم مثل هذه الأمثلة البسيطة) .

س ـ حسنا . إذا كنت قد فهمت كل شيء فأخبرني ماذا تعرف عن التطبيق في المجموعات؟

ج ـ لوجود تطبيق بين مجموعتين يجب أن يكون لدينا مجموعتان : مجموعة البدء (أو الانطلاق)، ومجموعة النهاية (أو المستقر) ويجب أن يكون لدينا أيضا قاعدة نستطيع بواسطتها أن نربط بين عناصر المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

ج ـ لقد عرفت التطبيق بشكل ممتاز . وهذا يعني أنني أستطيع المتابعة . . .

س ـ متابعة ماذا؟ ألم تقل كل شيء عن التطبيق في المجموعات؟

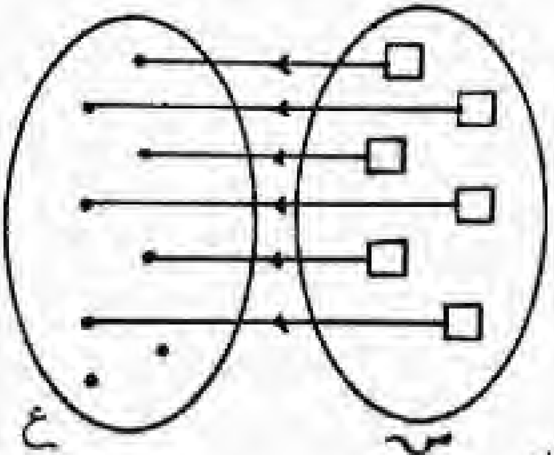
ج ـ ما قلناه هو أهم شيء فيه، ولكن هذا ليس كل شيء . نلاحظ في التطبيق أن هناك سهما واحدا فقط ينطلق من كل عنصر من المنطلق . (المجال) ولكن كيف تستقر الأسهم في المستقر أو المجال المقابل؟ هناك حالات مختلفة لهذا الاستقرار وسوف أفسرها لك مستخدما لذلك مثالا : توزيع قطع حلوى على مجموعة من الأطفال .

س ـ توزيع قطع حلوى؟ وأين هذه القطع؟

ج ـ أنا لم أقل إنني سوف أوزع قطع حلوى . لقد أردت فقط أن استعرض بعض حالات التطبيق في المجموعات، أما الأمثلة فهي فقط للتوضيح . وإليك المثال الأول :

لدينا ست قطع حلوى وثمانية أطفال . إذن هنا لدينا مجموعتان المجموعة

الأولى، مجموعة المنطلق وهي : ست قطع حلوى. المجموعة الثانية، مجموعة المستقر وهي: الأطفال الثمانية، أما توزيع الحلوى في هذا المثال فسوف يتم بالشكل التالي: لن يأخذ أي طفل أكثر من قطعة واحدة (اما الحلوى فسوف توزع كلها بالطبع). ماذا نجد بعد توزيع قطع الحلوى؟



ج ـ سوف نجد ان طفلين لم يأخذا حلوى.

س ـ وكيف يمكن أن نوضح العملية بشكل تخطيطي؟

س ـ ولكني لاأجيد الرسم. لذا فسوف ارسم قطع الشوكولا بشكل مربعات صغيرة وأرمز للأطفال بنقاط . بهذا الشكل: وهذا الرسم يمثل العملية كلها:

ج ـ ممتاز. لنرمز لمجموعة الحلوى بالرمز س ولمجموعة الأطفال بالرمز ع

فإذا تطلعت جيدا إلى هذا الرسم يمكن أن تتحقق من النتائج التالية:

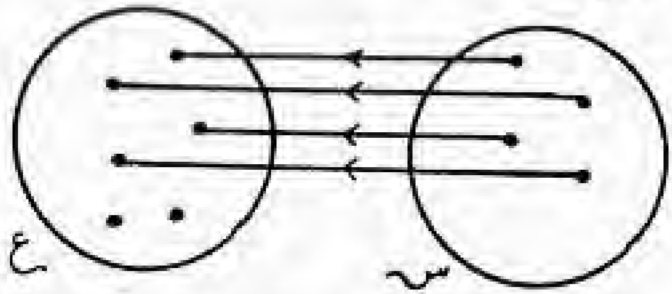
١ ـ كل سهم ينطلق من اي عنصر من عناصر المجموعة س ويستقر في أي عنصر من عناصر المجموعة ع.

في مثالنا هذا كان توزيع الحلوى وفق المبدأ التالي:

نعطي كل قطعة حلوى لطفل واحد إلى أن ينتهي توزيع جميع القطع.

٢ ـ من كل عنصر من المجموعة س ينطلق سهم واحد فقط (وبلغة الرياضيات نقول: من كل عنصر من المجموعة س ينطلق سهم وسهم واحد فقط). لأنه إذا انطلق من أي عنصر سهمان فإن هذا يعني أن قطعة حلوى واحدة قد اعطيت لطفلين وهذا ممكن في مثالنا هذا. ٣ ـ في كل عنصر من عناصر المجموعة ع يستقر سهم واحد على الأكثر. وهذا يعني أن كل طفل لن يأخذ اكثر من قطعة واحدة ولكن يمكن أن نجد طفلا لم يأخذ أي قطعة بوجد طفلان مثلا «فقد يكون معاقبا لخطأ ما قد ارتكبه، لذا فلم نعطه قطعة حلوى» هل هذا مفهوم؟

ج ـ مفهوم . وليس لدي أي سؤال .
س ـ جيد . والآن ارسم وحدك مثالا آخر لتطبيق مماثل، يكون فيه عنصر «معاقب» .
ج ـ هذا سؤال سهل جدا . سوف ارسم مجموعتين، وأرمز لعناصرهما بنقاط بحيث يكون المنطلق يحوي عناصر (نقاطا) أقل من عناصر المستقر ثم أصل بينهما بأسهم كما يلي :



س ـ حسنا . ولكن ألا تستطيع أن تعطيني مثالا على تطبيق من حياة مدرستك؟

ج ـ نعم أستطيع ذلك .
في صفي يجلس كل طفل على كرسي وأمامه طاولته «اي يوجد في الصف كراسي بدل المقاعد» . وهناك ثلاثة كراسي لايجلس عليها أحد . لتكن مجموعة المنطلق (المجال) هي مجموعة طلاب الصف، ومجموعة المستقر (المجال المقابل) هي مجموعة كراسي الصف . عندما يبدأ الدرس يجلس كل طفل على كرسيه، ويبقى (في مجموعة المستقر) ثلاثة كراسي لم يجلس عليها أحد (لم يصلها أي سهم) .
ج ـ هذا المثال صحيح . وأنا أرى أنك قد فهمت هذه الحالة تماما .
والآن عليك أن تحفظ : ان هذا التطبيق يسمى تطبيقا متباينا .

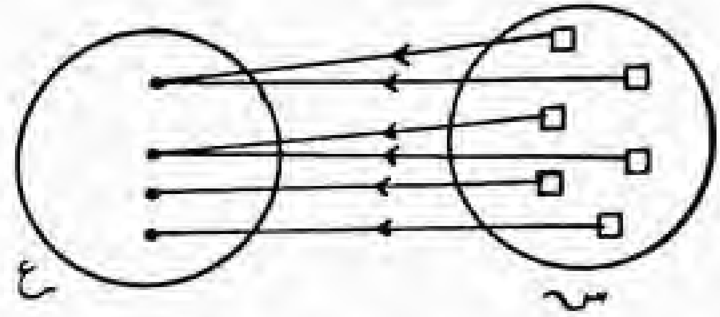
إذن فالتطبيق المتباين هو التطبيق الذي نصل فيه العناصر المختلفة من المنطلق بعناصر مختلفة من المستقر .

ولتأخذ الآن مثالا آخر على توزيع قطع الحلوى (لنجد حالة جديدة للتطبيق) .

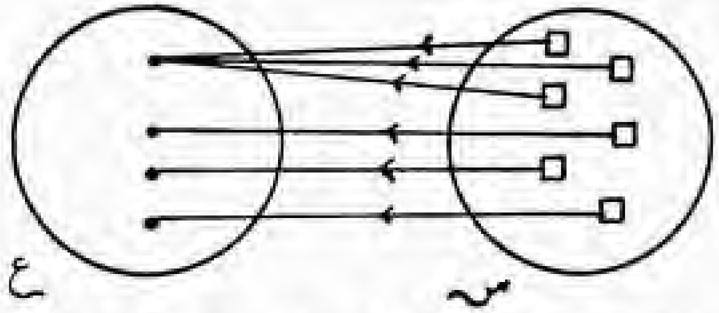
لنفرض أن لدينا ست قطع حلوى وأربعة أطفال . وتوزيع القطع يتم بالشكل التالي : كل طفل يأخذ قطعة واحدة على الأقل (أي يمكن أن يأخذ الطفل

أكثر من قطعة). كيف يتم توزيع قطع الحلوى في هذه الحالة؟

س ـ عند توزيع قطع الحلوى فإن طفلين سوف يأخذ كل منهما قطعتين من الحلوى، ويأخذ كل طفل من الأطفال الآخرين قطعة واحدة وتمثل العملية بالشكل التالي:



ج ـ هذا صحيح. ولكن يمكن أن نوزع قطع الحلوى أيضا بحيث أن طفلاواحدا يأخذ ثلاث قطع. وبقية الأطفال يأخذ كل منهم قطعة واحدة. وها هو ذا رسم التوزيع الجديد:



س ـ هل يوجد هنا اطفال «معاقبون»؟ (أي هل يوجد طفل لم تصله قطعة حلوى؟) أو هل يوجد عناصر في المستقر لم يصلها أي سهم؟

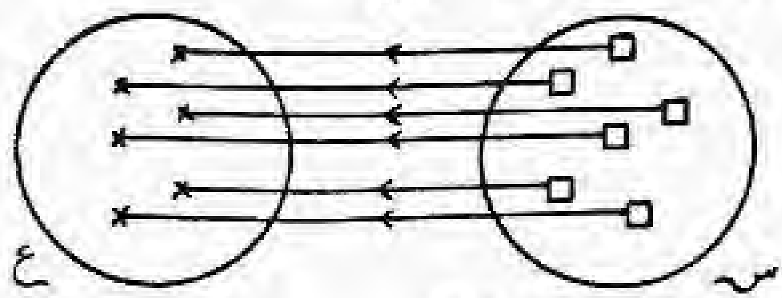
ج ـ كلا لايوجد أطفال «معاقبون»، ولكن يوجد أطفال قد حصلوا على أكثر من قطعة حلوى.

ج ـ هذا صحيح. لنصف الآن هذا التطبيق:

١ ـ كل سهم ينطلق من أحد عناصر المجموعة س ويستقر في العنصر المقابل في المجموعة ع.

٢ ـ من كل نقطة من المجموعة س ينطلق سهم واحد فقط.

٣ ـ في كل نقطة من المجموعة ع يصل سهم واحد على الأقل.
«يمكن أن يصل العنصر أكثر من سهم».
إن مثل هذا التطبيق يسميه الرياضيون تطبيقا غامرا (أو شاملا) وما يميز هذا التطبيق هو عدم وجود عناصر «معاقبة» أي لايوجد أي عنصر في المستقر لايصله أي سهم، وفي مثل هذه الحالة تصبح كل عناصر المستقر «معمورة». فالأسهم تغطي «أو تغمر» جميع عناصر المستقر.
فكر الآن واعطني مثالا على هذا التطبيق من مدرستك.
س ـ مجموعة طلاب المدرسة ومجموعة صفوف المدرسة و. . . . .
ج ـ هذا صحيح. إذا شكلنا من طلاب المدرسة مجموعة المنطلق، ومن صفوف المدرسة مجموعة المستقر. فعندما يقرع الجرس ويتوجه الطلاب إلى صفوفهم نجد الصورة التالية: «كل طالب يتوجه إلى صفه (من كل عنصر من المنطلق ينطلق سهم واحد» كل صف يدخل إليه عدد من الطلاب.
فمجموعة الطلاب تدخل وتشغل جميع الصفوف. وهذا تطبيق غامر (أو شامل).
ج ـ وصلنا الآن إلى الشكل الثالث والأخير من أشكال التطبيق.
ج ـ (الحمد لله ها نحن نقترب من نهاية هذا الموضوع)
س ـ ماذا تقول؟ ارفع صوتك فأنا لااسمع ماتقوله.
ج ـ أنا لم أقل شيئا. لقد قلت فقط إن هذا كله ممتع جدا!!
ج ـ حسن لنفرض الآن أنه يوجد لدينا ست قطع حلوى وستة أطفال ولنوزع القطع على الأطفال بحيث. . . . .
ج ـ بحيث إن كل طفل يأخذ قطعة حلوى واحدة.
ج ـ صحيح. ولنرسم هذا الشكل من التوزيع:



وإذا نظرنا جيدا إلى هذا الرسم نستطيع أن نتأكد من :

١ ـ ان الأسهم التي تنطلق من عناصر مختلفة من المجموعة س تتوجه إلى عناصر مختلفة من المجموعة ع .

٢ ـ أنه من كل نقطة من المجموعة س ينطلق سهم وسهم واحد فقط .

٣ ـ أنه في كل نقطة من المجموعة ع سيستقر سهم وسهم واحد فقط .

فهذا التطبيق إذن يتصف بصفات التطبيق الغامر والمتباين ، فهو تطبيق متباين «ولكن بدون عناصر معاقبة» ، وهوتطبيق غامر «ولكن بدون عناصر مكافئة ـ أي عناصر يصلها أكثر من سهم» . وهذا التطبيق الذي توصل فيه العناصر المختلفة من المنطلق بعناصر مختلفة من المستقر ، ولايوجد عناصر في المستقر لايصلها أي سهم يسمى تقابلا . والتعريف الدقيق لهذا التطبيق هو:

أن ذلك الشكل من التطبيق بين مجموعتين (الغامر «الشامل» والمتباين في نفس الوقت) يسمى تقابلا .

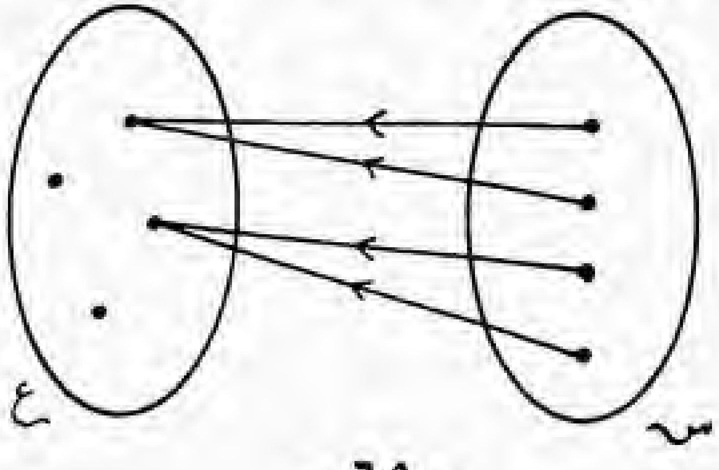
هل تستطيع أن تخبرني ما الذي يميز المجموعتين اللتين يمكن أن يكون بينهما تقابلا . ؟

ج ـ نعم . إن مايميز المجموعتين اللتين يمكن أن يكون بينهما تقابلا هو أن عدد العناصر فيهما متساو.

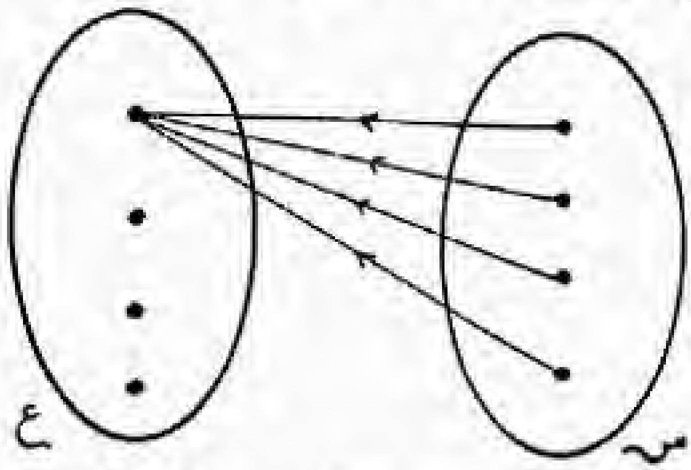
ج ـ هذا صحيح . فالتقابل يمكن أن يتحقق فقط بين مجموعتين فيهما نفس العدد من العناصر.

ولكن هل كل تطبيق بين مجموعتين لهما نفس العدد من العناصر هو تقابل؟

س ـ أعتقد أن هذا غير صحيح ـ فقد يكون التطبيق بالشكل التالي :



ج ـ هذا صحيح . وقد يكون أيضا بالشكل :



(هل تستطيع أن تجد عزيزي القارىء شكلا آخر لهذا التطبيق لايكون تقابلا؟)

إذن إذا وجد تقابل بين مجموعتين ، فإن لهاتين المجموعتين نفس العدد من العناصر. وهذه الخاصة الصحيحة بالنسبة للمجموعات ذات العناصر المنتهية . قد وسعها كانتور لتشمل المجموعات ذات العناصر غير المنتهية. ومن الجدير بالذكر أن الرياضيين يولون أهمية بالغة لهذا التوسيع إلى المجموعات غير المنتهية. ومن يرفض هذا التوسيع فإنهم ينظرون إليه نظرة. . . . (لاأحب أن اصفها)

ج ـ أشكرك على هذا التحذير. سوف أحاول أن أحفظ هذا :

إذا كان هناك تقابل بين مجموعتين ، فإن للمجموعتين نفس العدد من العناصر سواء أكانت المجموعتان منتهيتين أم غير منتهيتين فأنا لاأريد الصدام مع الرياضيين.

س ـ أعطني الآن أمثلة على مجموعات يمكن أن يتحقق فيما بينها تقابل؟

ج ـ أستطيع أن أعطيك الكثير من هذه الأمثلة . إليك بعضا منها :

- مجموعة الدول الأوروبية ـ ومجموعة عواصم هذه الدول.
- مجموعة السيارات ـ ومجموعة أرقام هذه السيارات في دولة معينة .
- مجموعة الأشياء المعروضة في واجهة إحدى المحلات ـ ومجموعة اسعار هذه الاشياء (بفرض أنه لايوجد شيئان لهما نفس السعر).

- مجموعة صفحات الكتاب - ومجموعة أرقام هذه الصفحات.

س - أعتقد أن هذه الأمثلة تكفي. والآن أعطني مثالين عدديين.

س - مثال عددي؟ حسن. إليك هذا المثال:

- مجموعة الأعداد الفردية - ومجموعة الأعداد الزوجية.

تقابل كل عدد فردي بضعفه (أي بعنصر من مجموعة الأعداد الزوجية).

ج - هذا صحيح يجب أن أعترف أنك قد وضعت مفهوم التقابل في جيبك. . . .
عفوا: وضعته في رأسك. وإذا كنت قد فهمت مفهوم التقابل تماما، فلننتهز هذه الفرصة لكي نتعرف على أحد المفاهيم بالغة الأهمية والمرتبطة بمفهوم التقابل.

س - وما هذا المفهوم؟

ج - هذا المفهوم هو : المجموعات المتكافئة بالقدرة. نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان بالقدرة فيما إذا أمكن ايجاد تقابل فيما بينهما.

س - وهل هذا يعني أنه كان لدينا في جميع الأمثلة التي ذكرناها عن التقابل مجموعات متكافئة؟

ج - بالتأكيد . . كل المجموعات التي يوجد فيما بينها تقابل هي مجموعات متكافئة بالقدرة هل لديك سؤال آخر؟

س - هل يوجد رمز خاص للتكافؤ بين المجموعات؟

ج - نعم يوجد رمز خاص هو $\cong$ فنكتب (*)

س $\cong$ ع وهذا يعني أن: المجموعتين س وع متكافئتان بالقدرة «أي أن لهما نفس العدد من العناصر».

ولنراجع الآن معا الأشكال الثلاثة للتطبيق على مثال موزع البريد الذي يوصل الرسائل إلى البيت. لنتصور موزع البريد هذا مع حقيبته المملوءة

(*) تستخدم بعض الكتب الرياضية الأخرى الرمز ~ للتعبير عن تكافؤ المجموعات بالقدرة فتكتب A ~ B (المترجم).

بالرسائل، يحمل الرسائل إلى مختلف البيوت إلى أن تفرغ حقيبته من الرسائل.

لدينا إذن في هذه الحالة مجموعتان: مجموعة الرسائل في الحقيبة ومجموعة البيوت في القرية التي يحمل إليها الرسائل. والآن فكر ثم أجبني على الأسئلة الآتية:

متى تكون هذه العملية مع الرسائل تطبيقا متباينا، ومتى تكون غامرا «شاملا»، ومتى تكون تقابلا؟

س - المسألة مسلية جدا. ولكني سوف أحلها بمفردي فيما بعد.

ج - حسن. ولكن أرجو ألا تنسى وعدك هذا. وإذا كنت فعلا قد استوعبت تماما التطبيق بين المجموعات فإن هذا سوف يساعدك كثيرا في دراسة الرياضيات ومادام التطبيق يعد أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات.

س - لا أكاد أصدق أن هذا المفهوم بسيط إلى هذه الدرجة. ثم إنني لا أعتقد أن الرياضيين يعرفون التطبيق بهذا الشكل، بل يصوغونه بشكل اكثر تعقيدا.

ج - هذا صحيح. فالرياضيون لا يستخدمون هذه اللغة البسيطة التي نستخدمها هنا لعرض هذه المفاهيم وتبسيطها. إضافة إلى أنهم لا يرسمون مثل هذه الرسوم التي نرسمها للتوضيح، ولا يعطون مثل هذه الأمثلة، ولكنهم يتوصلون إلى نفس المفهوم الذي توصلنا إليه. واليك تعريف أحد الرياضيين للتطبيق:

« نعرف تطبيقا للمجموعة سـ في المجموعة ع بالثلاثية

(سـ، ع، تا) التي تتألف من:

المجموعة سـ ونسميها مجموعة المنطلق أو مجال التعريف، والمجموعة ع ونسميها مجموعة المستقر أو مجال القيم أو مجموعة القيم.

والقاعدة تا التي يمكن بواسطتها أن نربط كل عنصر س ∋ سـ بعنصر ع ∋ ع (العنصر ع يتعلق بالعنصر س).

والعنصر ع الذي نحصل عليه من العنصر س بواسطة القاعدة تا نرمز له بالشكل تا (س) ،ونسميه صورة العنصر س».

(من هنا جاءت إحدى تسميات التطبيق التي ذكرناها في بداية هذا الموضوع وهي : تصوير المجموعات).

وغالبا ما نتحدث عن العناصر س∈س~ كمتحولات مستقلة ،أما العناصر ع∈ع~ فنتحدث عنها كمتحولات تابعة للتطبيق. هذا هو تعريف الرياضيات للتطبيق. والآن قل لي بصراحة، هل فهمت كل ما قيل في هذا التعريف؟

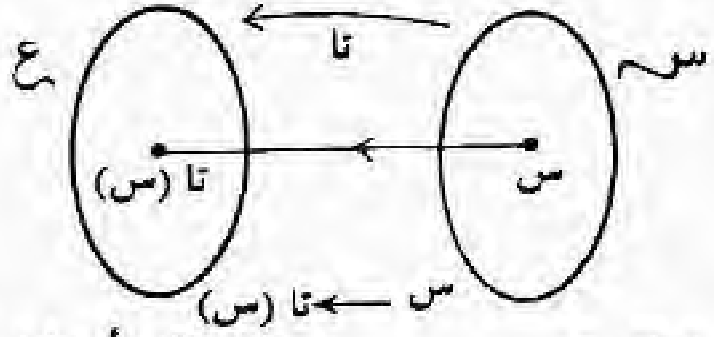
س ـ في الحقيقة أنني فهمت كل شيء.

ج ـ إذا كنت قد فهمت كل شيء في التعريف فاذكر لي ما حفظت منه.

س ـ موافق. ولكني سوف أستخدم الرسم أثناء ذلك ،لأن الإعادة ستكون أسهل بالرسوم التوضيحية».

ج ـ حسن. ارسم وفسر ما حفظته من التعريف.

س ـ لدينا إذن مجموعتان س~، ع~



س ∈ س~ ع ∈ ع~ أو تا (س) ∈ ع~

س~ $\xleftarrow{\text{تا}}$ ع~ أو س ⟵ تا (س)

والثلاثية (س~، ع~ ، تا) تتألف من مجموعة المنطلق (المجال) س~ ومجموعة المستقر (المجال المقابل) ع~ والعملية تا أو القاعدة التي يرتبط وفقها كل عنصر من س~ بعنصر من المجموعة ع~. عناصر المجموعة س~ نسميها متحولات مستقلة. وعناصر المجموعة ع~ نسميها توابع. هل هذا صحيح؟

ج - صحيح . وأعتقد أن الرياضي الحقيقي لن يستطيع أن يعاتبك في شيء فكل ما ذكرته صحيح .

إذن فالنقاط الهامة والمميزة في هذا التعريف، والتي لم تغفلها أنت، هي :

مجموعة المنطلق (المجال) س (مجموعة التعريف)

مجموعة المستقر (المجال المقابل) ع (مجموعة القيم)

العملية أو القاعدة تا التي ترتبط بواسطتها عناصر المنطلق بعناصر المستقر :

س $\xrightarrow{\text{تا}}$ ع

وقد نعبر عن العملية تا في التطبيق بعبارة فيها طلب مثلا :

« أضف العدد ٥ » . عندئذ نكتب هذا التطبيق بالشكل :

ع = س + ٥

أو « اضرب بالعدد ٤ ثم اطرح العدد ٢ »

أي أن ع = ٤ س - ٢

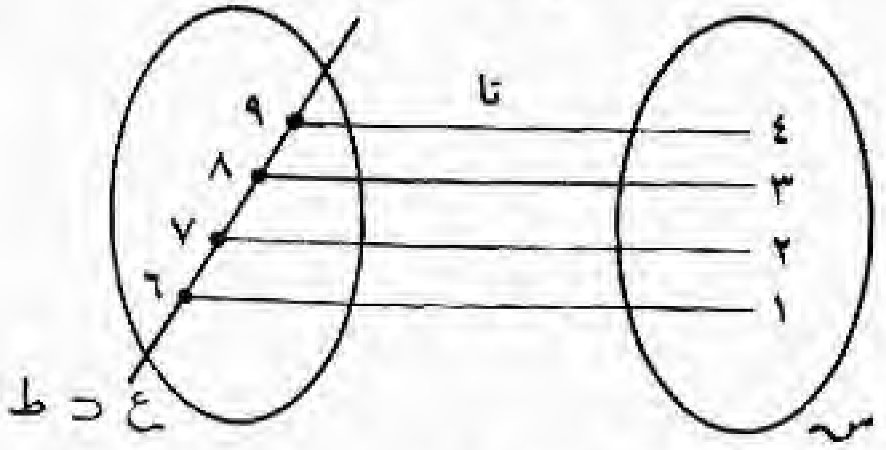
أو نعبر عن تا بشكل آخر مثل «ربع العدد» أي :

ع = س ٢ أو بأي شكل آخر .

فاذا أخذنا مثلا الطلب : « أضف العدد ٥» أي ع=س+٥

وأخذنا مجموعة المنطلق س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ومجموعة المستقر هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية أي ع ⊂ ط . عندئذ يمكن أن نمثل هذا التطبيق بالشكل .



ع = س + ٥

س ـ حقا إن هذا ممتع وبسيط جدا . إذن فالتطبيق يلعب دور «الأمر» الذي يجب أن ننفذه لكي نحصل على عناصر المستقر من عناصر المنطلق .

ج ـ نعم . يجب أن نفهم التطبيق تماما بهذا الشكل .

الأزواج ـ الثنائيات :

س ـ وهل للأزواج علاقة بالرياضيات ؟ وهل زوج الأحذية (مثلا) هو مفهوم رياضي ؟ . لا أعتقد أنك تريد أن تتحدث عن الزوجين أيضا (زوج وزوجة) كمفهوم رياضي ها . . ها . . ها . .

ج ـ اضحك . اضحك كما تشاء . ولكن الأزواج هو مفهوم هام جدا في الرياضيات . والزوج يعني مجموعة مؤلفة من عنصرين أي تحمل نفس المفهوم لكلمة «زوج» التي نستخدمها في حياتنا اليومية . ونستخدم في الرياضيات ـ طبعا ـ أزواجا مؤلفة من أعداد (بصورة أساسية) وليس أزواجا من الجوارب أو القفازات .

س ـ وما حاجة الرياضيات إلى الأزواج؟

ج ـ أرجو أن تتحلى بالصبر بعض الشيء لأنه يجب أن تتعرف أولا على هذا المفهوم بشكل كامل . وبعد ذلك نرى أين وكيف نستخدمه (وقد تكون استخدمته في مكان ما دون أن تسميه) . تعلم أنه يمكن أن تأخذ أي عددين ونشكل منهما زوجا .

والأزواج يمكن أن تكون أحرفا وليس فقط أعدادا ، وهذه بعض الأمثلة :

٤ ، ٨   ٥، ٧   ن، م   ج، ع   س، ع

إذن من الضروري أن يتواجد في الزوج عنصران ، أما ترتيب تواجدهما في الزوج فغير مهم ، فالأزواج السابقة يمكن أن نكتبها أيضا بالشكل :

٨ ، ٤   ٧ ، ٥   م ، ن   ع، ج   ع، س

ولكننا غالبا ما نعطي أهمية لترتيب كتابة عنصري الزوج في الرياضيات . أي أنه هناك أهمية لتحديد العنصر الأول للزوج والعنصر الثاني له .

في هذه الحالة نقول إن الزوج مرتب. فالأعداد مثلا غالبا ما تذكر بترتيب معين وفق المبدأ التالي: يذكر أولا العدد الصغير ثم العدد الكبير، ومن الممكن أن يكون الترتيب بشكل آخر مغاير. أما الأحرف فتكتب عادة وفق ترتيبها الهجائي، وقد تكتب وفق ترتيب آخر. وكقاعدة عامة، فإن الزوج المرتب يكتب ضمن قوسين صغيرين كمايلي:

(٣، ٥) (٦، ٨) (س، ع) (ب،جـ)

4. حاول الآن أن تتحقق من أن الزوج غير المرتب هو مجموعة مؤلفة من عنصرين، بينما الزوج المرتب ليس مجموعة مؤلفة من عنصرين في الحالة العامة.

ثم أجب على السؤال التالي:

5. أي من الأزواج التالية أزواج مرتبة:

قبعتان، زوج أحذية.

واضح الآن أن الزوج المرتب (ب، جـ) يختلف عن الزوج

(جـ، ب) أي أن (ب، جـ) $\neq$ (جـ، ب)

إذا كانت ب $\neq$ جـ.

أما المثال الذي يوضح بدقة استخدام الأزواج المرتبة (الثنائيات) في جملة الإحداثيات: حيث. . .

س ـ وما «جملة الإحداثيات»؟.

ج ـ جملة الإحداثيات مؤلفة من محورين للأعداد، حيث. . .

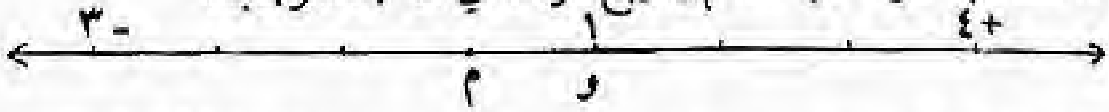
س ـ وما «محور الأعداد»؟

ج ـ ألا تعرف محور الأعداد أيضا؟ أم أنك قررت أن تضيع الوقت بمثل هذه الأسئلة؟ حسن. سوف أفسر لك ما محور الأعداد، وماجملة الإحداثيات آملا ألا تسألني بعد ذلك: ماالمحور؟.

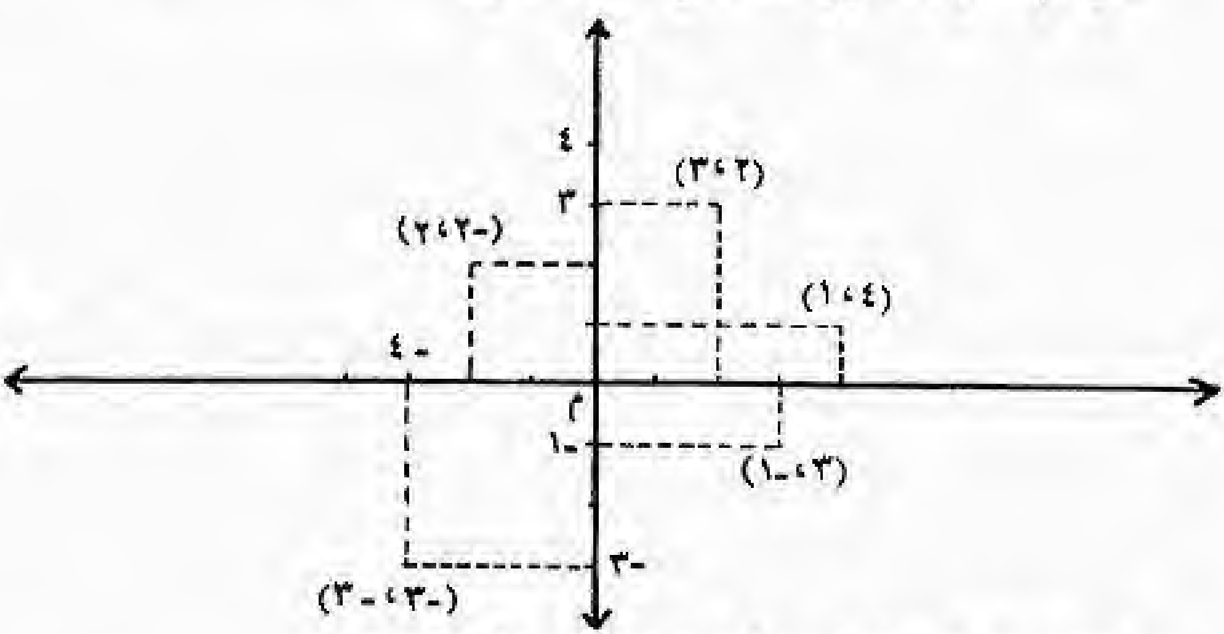
محورالأعداد «أو مستقيم الاعداد» هو مستقيم عُلِّم بنقطتين: نقطة البداية ونرمز لها عادة بالرمزم، نقطة الواحدة و.

هاتان النقطتان تحددان واحدة* الأطوال $\overline{مو}$. أما الاتجاه من م إلى و فيؤخذ كاتجاه موجب والاتجاه المعاكس له يؤخذ كاتجاه سالب على محور الأعداد. وهناك علاقة بين نقاط محور الأعداد والأعداد، حيث إن كل نقطة تقابل عدداً واحداً فقط، وكل عدد يقابله نقطة واحدة من محور الاعداد.

مثلا: إذا أردنا أن نحدد النقطة التي توافق العدد+٤ على مستقيم الأعداد، فإننا نسحب طول الواحدة $\overline{مو}$ أربع مرات في الاتجاه الموجب.



أما النقطة التي توافق العدد ـ ٣ فنحصل عليها بسحب واحدة الأطوال ثلاث مرات بالاتجاه المعاكس اعتبارا من نقطة البدء. أما جملة الإحداثيات فهي عبارة عن محورين للأعداد لهما نفس نقطة البداية. وإذا كان المحوران متعامدين، فان الجملة نسميها جملة إحداثيات متعامدة. تمعن الآن في الرسم التالي وأخبرني ماذا يمثل هذا الشكل:



س ـ هنا توجد مجموعة من الأزواج المرتبة من أعداد ونقاط.

ج ـ هذا صحيح . إن جملة الإحداثيات (الموضحة بالرسم) تحدد العلاقة بين مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد ونقاط المستوى وفق المبدأ التالي: كل

* تستخدم المترجمة كلمة «واحدة» حيث نستخدم هنا «كلمة وحدة». (المحرر)

زوج مرتب (ثنائية) من الأعداد يوافق نقطة واحدة فقط من المستوى وبالعكس..

س ـ وبالعكس : كل نقطة من المستوى توافق زوجا، زوجا واحدا مرتبا من الأعداد.

ج ـ وهذا هو الاستخدام الهام جدا للأزواج المرتبة. إن محور الأعداد وجملة الإحداثيات هي جسر خاص يربط مابين الأعداد والنقاط، أي جسر خاص وهام يربط مابين الحساب والهندسة.

س ـ وهل لجملة الإحداثيات هذا الدور الهام في الرياضيات؟

ج ـ إنها لا تلعب دورا هاما فحسب، بل يعد اكتشافها (أو ابتكارها) بداية عهد جديد في الرياضيات.

س ـ إذن جملة الإحداثيات أهم بكثير مما يمكن أن نتصور. ولكن ما المراحل الأساسية في تاريخ الرياضيات بشكل عام؟.

ج ـ لقد ميز أحد الرياضيين المشهورين في العصر الحديث وهو: آ. ن. كولماغورف(٦) ـ أربع مراحل لتطور علم الرياضيات وهي :

١ ـ **المرحلة الاولى** : وتمتد منذ بداية ظهور الرياضيات كعلم في العهود القديمة حتى أواسط القرن السادس عشر، أي حتى كشف ديكارت(٧) للهندسة التحليلية. وقد تشكلت في هذا العهد المفاهيم الأساسية للهندسة والحساب ووصلت الرياضيات إلى مستوى عال من التجريد وخاصة في أعمال أرخميدس وإقليدس. وماعيز هذه المرحلة هو الرياضيات «الإحصائية». ذلك أنها عالجت بصورة أساسية المقادير الثابتة والإنشاءات الهندسية.

٢ ـ **المرحلة الثانية** : وتبدأ بكشف ديكارت لجملة الإحداثيات والمقادير المتحولة وتنتهي حوالي أواسط القرن التاسع عشر.

---

(٦) اندريه نيكولايفتش كولماغورف (١٩٠٣) ـ عالم رياضيات سوفيتي شهير Kolmagorf A.n

(٧) رينيه ديكارت (١٥٩٦ ـ ١٦٥٠)ـ فيلسوف رياضي وفيزيائي فرنسي Descartes R.

وقد تطورت في هذه المرحلة وبشكل كبير مفاهيم التابع (الدالة) والتحويلات الهندسية.

٣ ـ المرحلة الثالثة: وتبدأ حوالي الستينات من القرن التاسع عشر وتمتد حتى الثلاثينات من القرن العشرين. وتتصف هذه المرحلة بعظمة دور نظرية المجموعات والمنطلق الرياضي فيها.

٤ ـ المرحلة الرابعة: وهي المرحلة المعاصرة وقد تجاوزت الخمسين عاما حتى الان. وقد بدأت هذه المرحلة ـ كما يؤكد كولماغورف ـ بظهور الآلات الحاسبة التي أعطت الرياضيات ميزة خاصة. وتطور الجبر المجرد والتبولوجيا والمنطق الرياضي بشكل كبير. وبصورة عامة فقد اكتسبت المجالات المجردة للمعارف الرياضية أهمية كبيرة. وفي نفس الوقت فان هذه المرحلة بالذات تتميز بالتقارب مابين الرياضيات النظرية والتطبيقية، طالما أن أعقد النظريات الرياضية المجردة تجد تطبيقا لها في حل مختلف المسائل التطبيقية بفضل الآلات الحاسبة الألكترونية. وفي هذه المرحلة أيضا أصبح «تاريخ الرياضيات» مادة مستقلة بذاتها.

لنتوقف هنا ونترك تاريخ الرياضيات، ولنعد إلى مجموعاتنا التي ندرسها ولنتعرف على استخدام آخر للأزواج المرتبة وذلك في عملية ضرب المجموعات.

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين:

اعلم أنه عندما تقرأ هذا العنوان سوف تقول لنفسك: «ها هي ذات تسمية غريبة أخرى. ألم يكن من الأفضل أن نقول ببساطة (حاصل ضرب مجموعتين)؟ إذ انني أرى أن مصطلح (ديكارتي) لايبشر بأي شيء جديد. ولكن يبدو أن هذا المصطلح يخفي وراءه خديعة أو (مقلبا) ما. انظر إلى أي درجة تحب الرياضيات تعقيد الأمور».

ج ـ حسن أنا أدرك مايدور في ذهنك من تساؤلات. وسوف أفسر لك هذه التسمية وهذا المفهوم باستخدام مجموعة من التمارين، وبعد ذلك سوف نصوغ معا تعريف (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين. (أنا لست متأكدا

بالطبع من أن هذه هي أفضل الطرق لتوضيح هذا المفهوم وصياغته. فقد يكون من الأفضل أن نبدأ بالتعريف وبعد ذلك نعرض عددا من الأمثلة. إن بعض المدرسين يفضلون الطريقة الأولى، وبعضهم يقول إن الطريقة الثانية هي الأفضل). لنأخذ مجموعتين (س، ع) ونختارهما بحيث لاتحويان عددا كبيرا من العناصر (وذلك بهدف التبسيط فقط وعدم الكتابة كثيرا).

ولتكن س مؤلفة مثلا من دائرة ونجمة فقط والمجموعة ع مؤلفة من مثلث ومربع ومستطيل أي:

س = (○، ★) ع = (△، □، ▭)

لنحول الآن عناصر المجموعتين إلى أزواج مرتبة بالشكل التالي:

العنصر الأول (أو المسقط الأول) لكل زوج نأخذه من المجموعة س

والعنصر الثاني (أو المسقط الثاني) لكل زوج نأخذه من المجموعة ع

فنحصل على الأزواج المرتبة (الثنائيات) التالية:

(○ ، △)، (○ ، □)، (○ ، ▭) - إذا كان العنصر الأول هو الدائرة

(★ ، △)، (★ ، □)، (★ ، ▭) - إذا كان العنصر الأول هو النجمة

لنشكل الآن مجموعة عناصرها هي هذه الأزواج المرتبة:

{(○ ، △)، (○ ، □)، (○ ، ▭)،
(★ ، △)، (★ ، □)، (★ ، ▭)}

هذه المجموعة الجديدة التي حصلنا عليها تسمى الجداء (الحاصل الديكارتي للمجموعتي س وع ونرمز لها ب س × ع

س - هل هذا كل شيء عن الجداء (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين؟

ج - نعم.

ج - المفهوم ليس معقدا كما توقعت. لقد توقعت أسوأ من ذلك.

ج ـ نعم المفهوم ليس معقدا. هل تستطيع أن تجد بنفسك الجداء الديكارتي للمجموعتين:

ص = (قلم، مسطرة) ك = (دفتر، كتاب)

س ـ نعم أستطيع ذلك. إن الجداء هو:

ص × ك ={(قلم، دفتر)، (قلم، كتاب)، (مسطرة، دفتر)، (مسطرة، كتاب)}

ج ـ هل تستطيع أن تجد الجداء ك × ص؟

س ـ نعم. ها هو ذا الجداء المطلوب:

ك × ص ={(دفتر، قلم)، (دفتر، مسطرة)، كتاب، قلم)، (كتاب، مسطرة)}

ج ـ هذا صحيح. اكتب معي الآن هذه الاسئلة وحاول الإجابة عليها بمفردك:

٦ ـ هل المجموعتان ص × ك، ك × ص متساويتان؟ فسر ذلك.

٧ ـ هل المجموعتان ص × ك، ك × ص متكافئتان في القدرة (×)؟ فسر ذلك.

٨ ـ عرف المجموعتين ص × ص ثم ك × ك.

٩ ـ ما العلاقة بين عدد عناصر المجموعتين ص و ك وعدد عناصر الجداء الديكارتي لهما ص × ك؟

س ـ آه ما أكثر هذه الأسئلة. أنا لن أتمكن من الإجابة عليها بسرعة.

ج ـ لاباس. أنا لااهتم كثيرا بالوقت. مايهمني هو أن تعمل وتحصل على الإجابة الصحيحة (الأسئلة لك عزيزي القارىء)

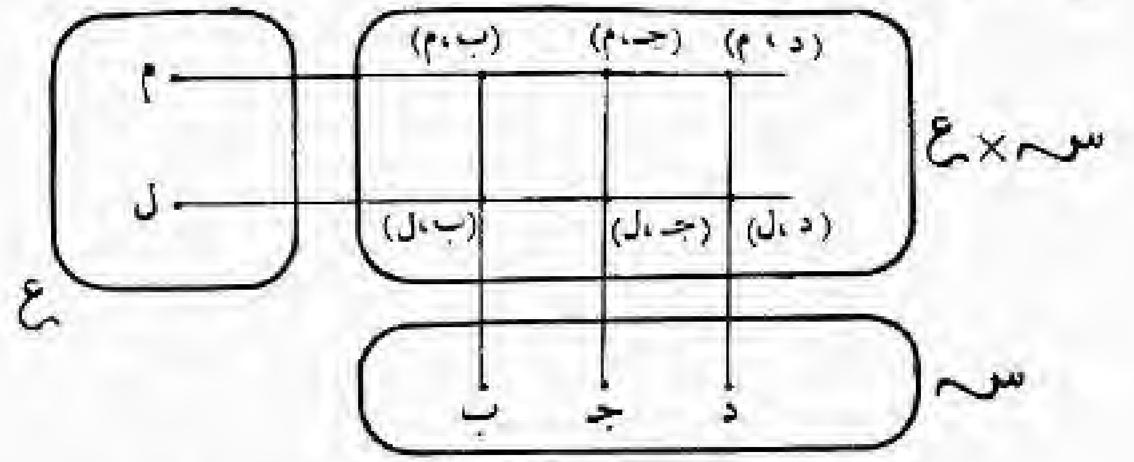
س ـ وهل يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بالرسوم؟

(×) تكون المجموعتان متكافئتين بالقدرة إذا كان لهما نفس العدد من العناصر.

هذا التعريف يخدم اغراضا محدودة، إذ تكون المجموعتان متكافئتين أو متساويتين بالقدرة إذا أمكن ايجاد تطبيق يكون تقابلا بينهما. (المحرر)

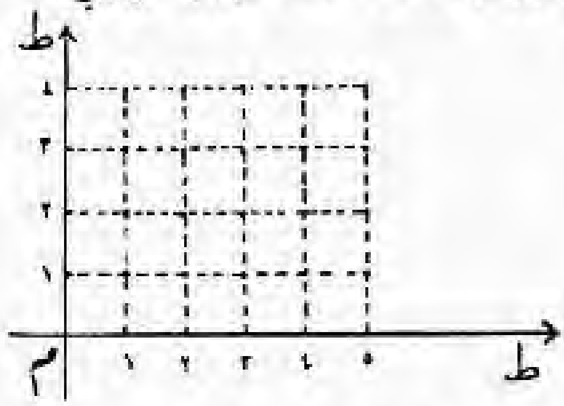
ج ـ نعم يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بالرسوم. ولكني أتعجب كيف لم تسأل عن هذا قبل الآن؟ (أرى أنك لم تهتم بالتعريف الرياضي للجداء وإنما كل مايهمك هو تمثيله بالرسوم!) سوف أمثل لك بالرسم جداء المجموعتين.

سـ = {ب، جـ، د} ع = {ل، م}



وإذا أخذنا الأعداد الطبيعية ط = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . } * فإن الجداء الديكارتي ط × ط له أهمية خاصة.

فهذا الجداء يحوي ـ بالطبع ـ عددا لانهائيا من الأزواج المرتبة، ونحن نستطيع أن نمثله بواسطة شبكة نقاطها تمثل أزواجا ذات أعداد طبيعية كما يلي:



وإذا أخذنا أي زوج من الأعداد الطبيعية فسوف نجده حتما في هذه الشبكة، وإذا تصورنامثل هذه الشبكة، التي تحوي كل الأزواج الممكنة من الأعداد الطبيعية فإنه يصبح واضحا لدينا أنه يمكن اعتبار جداء الأعداد تابعا (تطبيقا) منطلقه (مجال) هذه الشبكة. أي المجموعة ط × ط ومستقرة (مجال مقابل) هو المجموعة ط نفسها. أي أن (حاصل ضرب) الأعداد هو التابع: ط × ط ط ويمكن أن نفسر هذا الجداء بالشكل: إن كل زوج

* لايعتبر المؤلف (الصفر) عددا طبيعيا، والقضية محض اتفاق.

(المحرر)

مرتب (ب، جـ) ∈ ط× ط يوافق عددا طبيعيا محددا ى نسميه جداء(حاصل ضرب) العددين ب، جـ أي: ى = ب • جـ مثلا: الجداء ٨ × ٧ يفهم كنقطة من ط التي توافق العنصر (٨، ٧) من ط × ط وهو العدد الطبيعي ٥٦ من المجموعة ط.

أعتقد أنه حان الوقت لصياغة التعريف الرياضي للجداء الديكارتي، لمجموعتين (حتى بدون أن تسأل عنه):

«إن (الحاصل) الديكارتي للمجموعتين س و ع هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة، (أو الثنائيات) (ب، جـ) التي يكون فيها المسقط الأول ب عنصرا من المجموعة س، والمسقط الثاني جـ عنصرا من المجموعة ع). وإذا طلب إليك أحد الرياضيين أن تكتب تعريف الجداء الديكارتي لمجموعتين، عندئذ تأخذ ورقة وقلما وتكتب مايلي:

س×ع ={(ب، جـ): ب ∈ س و جـ ∈ ع}وتقول لنفسك (وأنت تكتب) مايلي:

(الحاصل) الديكارتي للمجموعتين س و ع هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (ب، جـ) التي تحقق الخاصة: ب عنصر من المجموعة س و جـ عنصر من المجموعة ع).

المجموعة والأعداد:

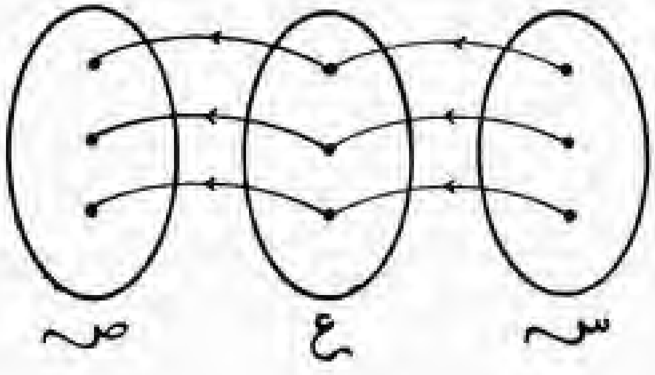
س - هل هناك علاقة بين المجموعات والأعداد؟

س - بالتأكيد هناك علاقة. لنتذكر مثلا المجموعات المتكافئة أو المتساوية بالقدرة: كيف عرفناها؟

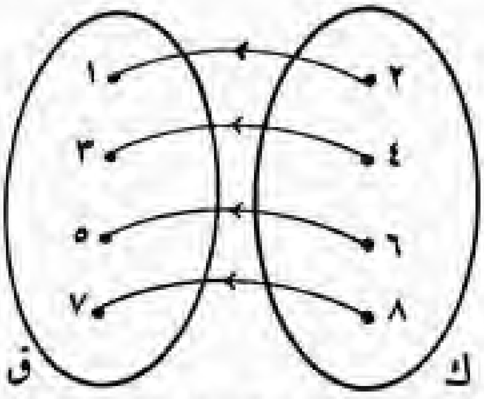
ج - هي المجموعات التي يمكن أن نجري فيما بينها تقابلا ١ - ١

ج - أعطني أمثلة على المجموعات المتكافئة.

ج - في الشكل ١ المجموعتان ك، ق متساويتان في الشكل ٢ المجموعات س، ع، ص متكافئة



(الشكل ٢)



(شكل ١)

ج ـ الأمثلة صحيحة. إذن لم ننس بعد ما المجموعات المتكافئة.

وهكذا فنحن نلاحظ أنه توجد صفة مشتركة بين المجموعات المتكافئة ففي المثال الأول (شكل ١) نلاحظ أن للمجموعتين ك، ق نفس العدد من العناصر. وكذلك في المثال (الشكل ٢) للمجموعات س، ع، ص نفس العدد من العناصر. ونقول عادة إن للمجموعتين ك، ق نفس القدرة (وكذلك للمجموعات س، ع، ص نفس القدرة). أو نقول إن لهما نفس العدد الرئيس.

س ـ وهل توجد أعداد غير الأعداد الرئيسة؟

ج ـ بالتأكيد نحن نميز بين الأعداد الرئيسة والأعداد الترتيبية البسيطة.

فالعدد الرئيس هو إجابة على السؤال: كم عنصرا تحوي المجموعة؟ (نقول مثلا إن المجموعة ك (في الشكل ١) تحوي ٤ عناصر. فالعدد الرئيس لها هو ٤) أما العدد الترتيبي البسيط فهو إجابة على السؤال: ماترتيبه؟ (مثلا ماترتيب العنصر آ في المجموعة {ا، ب، جـ}؟

العنصر أ ترتيبه الاول

العنصر ب ترتيبه الثاني

من هنا نستنتج أن ١، ٢، ٣، ٤ . . . أعداد رئيسة

بينما: الاول الثاني الثالث. . . أعداد ترتيبية بسيطة.

لنعد إلى مثالينا في الشكلين ١، ٢ ما الأعداد الرئيسة هنا؟

ج ـ أربعة : ثلاثة .

ج ـ هذا صحيح . لنتعرف الآن على رمز رياضي حديث. نرمز بلغة الرياضيات المعاصرة لرئيسي المجموعة س بالرمز ر (س) ففي المثالين السابقين يكون لدينا :

ر(ك) = ر(ق) = ٤

ر(س) = ر(ع) = ر(ص) = ٣

والعدد الرئيس لكل مجموعة مؤلفة من عنصر واحد هو الواحد

والعدد الرئيس لكل مجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر هو ٣

ما العدد الرئيس للمجموعة الخالية؟

ج ـ الصفر،

س ـ وكيف نكتب هذا؟

ج ـ بهذا الشكل ر(Φ) .

ج ـ صح . وها أنت ذا قد رأيت فائدة المجموعة الخالية هنا .

والآن هل الموضوعة التالية واضحة تماما لك : إن الأعداد الطبيعية أعداد رئيسة لمجموعات منتهية .

ج ـ نعم . إن هذا يعني أن كل مجموعة منتهية تقابل عددا طبيعيا محددا .

ج ـ جيد لقد حزرت .

س ـ لم أحزر، ولكن فهمت .

ج ـ عفوك . . حقيقة إن هذا يعني أنك فهمت ما أقوله .

العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد :

ج ـ إذا كنت قد فهمت العلاقة بين المجموعات والأعداد الطبيعية فلن تجد أي صعوبة في فهم العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد، أي العلاقة بين اجتماع (اتحاد) المجموعات وجمع الأعداد الطبيعية ـ المجموعة المتممة والأعداد الطبيعية . . . . .

س ـ يبدو لي أنه توجد علاقة بين هذه العمليات ولكني لا أعرف بدقة ماهي العلاقة؟

ج ـ العلاقة بينها بسيطة جدا. وسوف تتأكد من ذلك بنفسك لنبدأ باجتماع المجموعات وجمع الأعداد الطبيعية:

إذا كان لدينا مجموعتان منتهيتين س، ع فإننا نستطيع أن نتأكد بسهولة أن:

ر(س ∪ ع) + ر(س ∩ ع) = ر(س) + ر(ع)(١) وبعبارة أخرى: مجموع رئيس مجموعة اجتماع س، ع مع رئيس مجموعة تقاطعهما تساوي مجموع رئيس المجموعتين س، ع.

س ـ هذا ليس بسيطا كما صورته لي. هل يمكنك توضيح ماقلته بمثال محدد؟

ج ـ إليك هذا المثال:

لنفرض س = (١، ٢، ٣، ٤، ٥) ع = (٤، ٥، ٦، ٧)

هل تستطيع أن تجد اجتماع س و ع وتقاطعهما ثم رئيس مجموعة الاجتماع ومجموعة التقاطع ورئيس كل من س و ع؟

س ـ نعم أستطيع ذلك. وهذا هو الجواب:

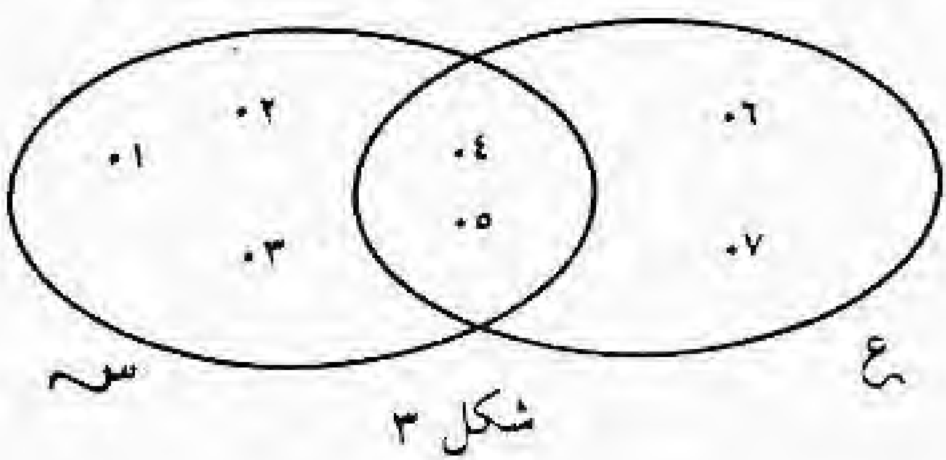
س ∪ ع = (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧)

س ∩ ع = (٤، ٥)

ر(س ∪ ع) = ٧   ر(س ∩ ع) = ٢

ر(س) = ٥   ر(ع) = ٤

أستطيع أن أمثل أيضا هاتين المجموعتين بمخطط كما يلي:



شكل ٣

ج ـ هذا صحيح. بقي لدينا الآن التأكد من صحة العلاقة (١) لهذا المثال.

س ـ وكيف نتأكد من صحتها؟

جـ بطريقة التعويض. نعوض رئيس المجموعة التي حصلنا عليها في العلاقة (١)

س ـ سوف أعوض وأرى ماذا ينتج: العلاقة (١) هي:

ر(سـ ∪ ع) + ر(سـ ∩ ع) = ر(سـ) + ر(ع) نعوض نجد:

٧ + ٢ = ٥ + ٤

٩ = ٩ وهذا صحيح

ج ـ وإذا استعضنا عن المجموعتين سـ، ع بأي مجموعتين منتهيتين وجدنا أن العلاقة (١) صحيحة أيضاً. ويمكنك أن تتأكد من ذلك بنفسك.

فالعلاقة (١) هي العلاقة بين الاجتماع والجمع. غير أنه توجد حالة مهمة وممتعة بنفس الوقت. وهي الحالة التي يكون فيها تقاطع سـ مع ع مجموعة خالية. عندئذ يكون:

ر(سـ ∩ ع) = ر(Φ) = ٠ والمساواة (١) تصبح

ر(سـ ∪ ع) = ر(سـ) + ر(ع) (٢)

وهذه المساواة هي حالة خاصة من المساواة (١)، يمكن أن نصوغ هذه الحالة الخاصة بالشكل:

إذا لم يكن بين المجموعتين سـ، ع عناصر مشتركة فإن رئيس اجتماع المجموعتين يساوي مجموع رئيس المجموعتين. حاول أن تعطي مثالاً على هذه الحالة الخاصة:

س ـ حسن. لنأخذ مثلاً: سـ = {٢، ٤، ٦، ٨} ع = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}

إن سـ ∩ ع = Φ

سـ ∪ ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

ر(سـ) = ٤، ر(ع) = ٥، ر(سـ ∪ ع) = ٩ لنتأكد من صحة العلاقة.

ر(سـ ∪ ع) = ر(سـ) + ر(ع) وبالتعويض نجد أن: ٩ = ٤ + ٥

٩ = ٩ والعلاقة صحيحة.

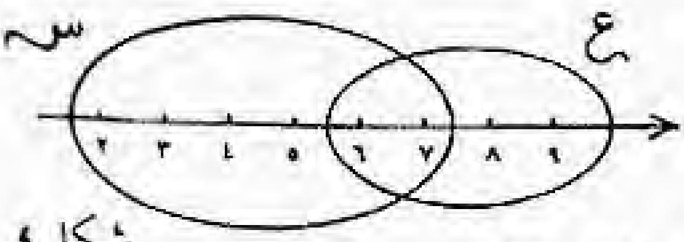
ج ـ جيد. وإن كان من الخطأ أن نصوغ نتيجة عامة استنادا إلى مثال واحد. لذا يجب عليك أن تتأكد من صحة العلاقة بنفسك بطرح أمثلة أخرى مختلفة.

لنر الآن العلاقة بين الفرق بين مجموعتين منتهيتين وعملية الطرح من أجل أي مجموعتين س، ع منتهيتين، تكون العلاقة التالية صحيحة:

ر(س/ع) = ر(س) - ر(س∩ع) (٣) أي ان: رئيس الفرق س/ع يساوي حاصل طرح رئيس مجموعة التقاطع من رئيس المجموعة الاولى س. ولنوضح العلاقة ونتأكد من صحتها بمثال:

لدينا: س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} ع = {٦، ٧، ٨، ٩}

لنمثل المجموعتين على محور الأعداد ثم نجد الفرق والتقاطع لهما:



شكل ٤

س/ع = {٢، ٣، ٤، ٥} س∩ع = {٦، ٧}

هل تستطيع ان تجد رئيس كل من المجموعات الموجودة في العلاقة(٣)؟

س ـ يمكننا ذلك بسهولة وبسرعة. هذه هي الإجابات:

ر(س) = ٦، ر(ع) = ٤، ر(س/ع) = ٤، ر(س∩ع) = ٢

ج ـ ماذا سنفعل بعد ذلك؟!

ج ـ سوف نتحقق من صحة العلاقة (٣)

ج ـ هذا صحيح. لنتحقق من ذلك معا.

س ـ نكتب أولا المساواة (٣) وبعد ذلك نكتب الأعداد الموافقة:

ر(س/ع) = ر(س) - ر(س∩ع)

٤ = ٦ - ٢

٤ = ٤ وهذا صحيح

ج ـ حسن. ها أنت قد تأكدت من صحة العلاقة (٣) بنفسك ورأيت أنني لاأخدعك. والآن انتبه إلى أنه توجد هنا أيضا حالة خاصة جدا لفهم العلاقة بين فرق مجموعتين وطرح الأعداد:

إذا كانت ـ كحالة خاصة ـ ع مجموعة جزئية من المجموعة سـ أي ع ⊂ سـ فما مجموعة تقاطع سـ و ع أي ما المجموعة سـ ∩ ع ؟

ج ـ لحظة من فضلك (دعني أتذكر تعريف تقاطع مجموعتين):

تقاطع مجموعتين هو مجموعة مؤلفة من العناصر المشتركة بين المجموعتين فإذا كانت ع محتواة في سـ فهذا يعني أن جميع عناصر ع هي في نفس الوقت عناصر في المجموعة سـ

نعم إذا كان ع ⊂ سـ فإن سـ ∩ ع = ع

س ـ صحيح ولكن الحق يقال إنك احتجت وقتا ليس بالقليل لكي تتذكر تعريف تقاطع مجموعتين، لا بأس مادمت قد تذكرته بشكل صحيح. وهكذا فإذا كان سـ ∩ ع = ع عندئذ ر(سـ ∩ ع) = ر(ع) فكيف ستصبح العلاقة (٣) في هذه الحالة؟. أي كيف سنكتب المساواة: ر(سـ/ع) = ر(سـ) - ر(سـ ∩ ع)؟

ج ـ سوف نكتبها بالشكل التالي: ر(سـ/ع) = ر(سـ) - ر(ع).

ج ـ جيد والآن يجب ألا ننسى أنه:

إذا كانت ع ⊂ سـ حيث سـ، ع مجموعتين منتهيتين فإن رئيس الفرق للمجموعتين سـ، ع يساوي الفرق بين رئيس المجموعتين سـ، ع. لنتحقق من هذه الحالة الخاصة بمثال: لدينا:

سـ = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} ع = {٤، ٥، ٦} واضح أن ع ⊂ سـ ما الفرق بين المجموعتين سـ، ع؟.

س ـ الفرق هو: سـ/ع = {٢، ٣، ٧}

ج ـ والآن لنتحقق من صحة المساواة: ر(سـ/ع) = ر(سـ) - ر(ع)

لنحدد أولا عناصر هذه المساواة:

ر(سـ/ع) = ٣ ر(سـ) = ٦ ر(ع) = ٣ نعوض في المساواة نجد: ٣ = ٦ - ٣ وهذه العلاقة صحيحة. استنادا لذلك (والأمثلة كثيرة يمكن أن

تطرحها لنفسك) يمكن أن نتوصل إلى النتيجة التالية: إن عمليات الاجتماع (الاتحاد) والفرق بين المجموعات تتميز بأنها أكثر اتساعا وشمولا من عمليات الجمع والطرح على الأعداد. إذ انه في حالات خاصة فقط، وعندما تتحقق خاصة معينة (مثلا س ∩ ع = Φ).

يمكن أن يتحول الاجتماع (الاتحاد) إلى جمع، والفرق إلى طرح (عندما ع ⊂ س)

وميزة الاتساع والشمولية للعمليات على المجموعات هي التي تعطيها الأهمية الكبرى في الرياضيات المعاصرة. وعناصر المجموعة يمكن أن تكون غير عددية وإنما تحمل مفاهيم أخرى رياضية مثل: نقطة، شعاع، تابع (تطبيق). . . . أو مفاهيم غير رياضية. وهذا ما دعا العالم الرياضي الشهير لوزين (٨) الى صياغة العبارة التالية:

«إن عناصر المجموعة يمكن أن تكون أشياء مختلفة: كلمات، ذرات، أعدادا، توابع، نقاطا، زوايا، . . . وغيرها. ولذلك فقد كان واضحا منذ البداية التوسع الكبير الذي تتميز فيه نظرية المجموعات وامكانية استخدامها في مجالات كثيرة للمعرفة (في الرياضيات والكيمياء والفيزياء و. . . .»

س ـ حسن لقد فهمنا الآن العلاقة بين اجتماع المجموعات وجمع الأعداد، وبين فرق المجموعتين وطرح الأعداد. فما العلاقة بين الجداء (الحاصل) الديكارتي لمجموعتين وضرب الأعداد؟. وبماذا تتصف هذه العلاقة؟

ج ـ هذا ما أردت أن أوضحه لك أيضا. ولنبدأ بالأمثلة التوضيحية:

لدينا المجموعتان س = {١، ٢، ٣} ع = {١، ٣} لنكتب الجداء الديكارتي لهما.

س × ع = {(١، ١)، (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٣، ١)، (٣، ٢)}

---

٨ ـ نقولا نقولا يفتش لوزين (١٨٨٣ ـ ١٩٥٠) عالم رياضيات روسي.
Louzeen N. N

لنجد الآن الأعداد الرئيسة للمجموعات الثلاث. واضح أن:

ر(س) = ٣   ر(ع) = ٢   ر(س×ع) = ٦

والعلاقة التالية: ر(س×ع) = ر(س) × ر(ع) صحيحة.

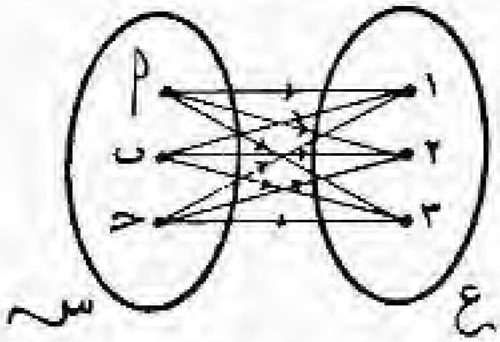
مثال آخر:

لدينا المجموعتان س = {أ، ب، جـ} ع = {١، ٢، ٣}

س× ع ={(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (ب، ١)، (ب، ٢) (ب، ٣)، (جـ، ٢)، (جـ، ٣)}

والأعداد الرئيسة في هذه الحالة للمجموعات الثلاث هي: ر(س)= ٣ ر(ع)= ٣ ر(س×ع)=٩ وهنا أيضا لدينا ر(س×ع)= ر(س) × ر(ع) ٩ =٣×٣.

ذلك أنه: لنوضح الجداء بالمخطط التالي:



كما ترى في المخطط فإن عدد الأسهم يساوي رئيس الجداء الديكارتي للمجموعتين س ، ع أي أن تعدادا بسيطا لعدد الأسهم يسمح لنا بتحديد العدد الموافق للجداء الديكارتي للمجموعتين، وهذا ما رأيناه في المثالين السابقين.

ويمكن أن نفهم هذه القاعدة بالشكل التالي: إذا كان ر(س)، ر(ع) رئيس المجموعتين س، ع فإن جداء هذين العددين يحدد رئيس الجداء الديكارتي للمجموعتين س، ع. أي أن

ر(س×ع) = ر(س) × ر(ع)

وهذا صحيح من أجل أي مجموعتين (وبامكانك التأكد من ذلك بالأمثلة).

ج - إن هذا الجداء معقد جدا.

ج - أنا أتفق معك في أنه جداء غير بسيط.

س - هل يعني كل هذا أنه لضرب ٣٩ في ٦٧ مثلا يجب أن أجد رئيس الجداء الديكارتي للمجموعتين س (التي رئيسها = ٣٩) وع (التي رئيسها = ٦٧)؟

اي يجب ان اجد عدد الأسهم في الجداء الديكارتي س × ع ؟ .

ج ـ نعم. تماما هذا ماتفعله. أن تستطيع أن ترسم مجموعة تحوي **٣٩** عنصرا، وأخرى تحوي ٦٧ عنصرا، وتربط عناصر المجموعة الأولى بكل عناصر المجموعة الثانية بواسطة الأسهم ثم تعد هذه الأسهم.

ج ـ شكرا على هذه النصيحة. اري انه من الأفضل أن أضرب الأعداد بالطريقة التي تعلمتها سابقا.

ج ـ أنا لم أنصحك بضرب الأعداد بهذه الطريقة. لقد أخبرتك فقط كيفية ضرب الاعداد بواسطة الجداء الديكارتي للمجموعات وليس من الضروري أن تستخدمه، غير أن العلاقة بين ضرب الأعداد والجداء الديكارتي للمجموعات يشغل دورا هاما جدا في نظرية المجموعات.

ج ـ إذا كان الأمر كذلك فليس لدي أي اعتراض، لأنني قد خشيت أن تجبرني في المستقبل على ضرب الأعداد باستخدام الأزواج المرتبة للجداء الديكارتي للمجموعتين.

ج ـ لن يحدث شيء لو قمت بهذا العمل بهدف التمرين فقط، إذا لم يكن لديك ماتفعله، وإذا أردت تثبيت معارفك في مجال العمليات على المجموعات فإنك تستطيع ذلك بحل التمارين التالية:

١٠ ـ لتكن لدينا المجموعات:

س = (١، ٢، ٣، ٤) ع = (١، ٣، ٥) ص = (٢، ٤، ٦)

هل المساواة من ١٠ ـ ١ إلى ١٠-١٦ في الجدول المرفق (١) صحيحة؟

١٠ ـ ١	س ∩ ع = ع ∩ س
١٠ ـ ٢	س ∪ ع = ع ∪ س
١٠ ـ ٣	س ∩ (ع ∩ ص) = (س ∩ ع) ∩ ص
١٠ ـ ٤	س ∪ (ع ∪ ص) = (س ∪ ع) ∪ ص
١٠ ـ ٥	س ∩ س = س

١٠ ـ ٦	س ∪ س = س
١٠ ـ ٧	س ∩ (ع ∪ ص) = (س ∩ ع) ∪ (س ∩ ص)
١٠ ـ ٨	س ∪ (ع ∩ ص) = (س ∪ ع) ∩ (س ∪ ص)
١٠ ـ ٩	س / (ع ∪ ص) = (س / ع) / ص
١٠ ـ ١٠	س ∪ (ع / ص) = (س ∪ ع) / ص
١٠ ـ ١١	س / ع = ع / س
١٠ ـ ١٢	س / س = Φ
١٠ ـ ١٣	س × ع = ع × س
١٠ ـ ١٤	ں(س × ع) = ں(ع × س)
١٠ ـ ١٥	ں(س) + ں(ع) = ں(س ∪ ع) + ں(س ∩ ع)
١٠ ـ ١٦	ں(س / ع) = ں(س) - ں(س ∩ ع)

جدول (١)

١١ ـ إذا كانت آ، ب، جـ أعدادا طبيعية، فهل المساواة في الجدول المرفق (٢) صحيحة؟

١١ ـ ١	آ، ب = ب، آ
١١ ـ ٢	آ + ب = ب + آ
١١ ـ ٣	آ (ب، جـ) = (آ، ب) جـ
١١ ـ ٤	آ + (ب + جـ) = (آ + ب) + جـ
١١ ـ ٥	آ، آ = آ
١١ ـ ٦	آ + آ = آ
١١ ـ ٧	آ (ب + جـ) = (آ، ب) + (آ، جـ)
١١ ـ ٨	آ + (ب، جـ) = (آ + ب) (آ + جـ)
١١ ـ ٩	آ ـ (ب + جـ) (آ ـ ب) ـ جـ
١١ ـ ١٠	آ + (ب ـ جـ) = (آ + ب) ـ جـ
١١ ـ ١١	آ ـ ب = ب ـ آ
١١ ـ ١٢	آ ـ آ = ٠

(تأكد من ذلك باعطاء أ، ب، جـ قيا مختلفة مثلا:
أ = ٢ ب = ٣ جـ = ٤ ، . . .

١٢ ـ قارن بين خواص العمليات على الأعداد (العلاقات من ١١ ـ ١ حتى ١١ ـ ١٢)، والعلاقة الموافقة بالنسبة للمجموعات في الجدول(١) وفسر كيف ترتبط الأولى بالثانية.

المجموعة المرتبة والمجموعة المرتبة جيدا:

س ـ حسن. لقد استوعبنا شيئا ما عن التشابه بين المجموعات والأعداد والتشابه بين العمليات على المجموعات والعمليات على الأعداد وأصبح واضحا لدينا دور المجموعات. ولكننا لم نفهم ماذا يعني هذا العنوان الذي وضعته، وهل بالامكان ترتيب المجموعة؟ أو هل يوجدبين المجموعات مجموعات غير مرتبة ها. . . ها. . . ها. . . .

ج ـ الأمر ليس بهذا المعنى الذي فهمته من كلمة (الترتيب) لذلك قبل أن نتحدث عن المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا سوف نوضح هذا المفهوم. نقول عن المجموعة س إنها مرتبة فيما إذا أمكن معرفة تسلسل العناصر فيها: أي أنه إذا أعطينا عنصرين ب، جـ من هذه المجموعة تستطيع أن تحدد تماما أي عنصر يقع قبل الآخر.

وفق هذا المفهوم تكون مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة مرتبة. ذلك أنه إذا أعطينا العددين ٤، ٥ من مجموعة الأعداد الطبيعية فنحن نستطيع أن نحدد تماما أن العدد ٤ يقع قبل العدد ٥ ومجموعة أيام الأسبوع هي مجموعة مرتبة.

ومجموعة أشهر السنة هي مجموعة مرتبة. ومجموعة أحرف الأبجدية هي مجموعة مرتبة. وفي الرياضيات نميز بين المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا.

س ـ وكيف تكون المجموعة مرتبة جيدا؟

ج ـ في الواقع أن كل المجموعات التي ذكرتها لك هي مجموعات مرتبة جيدا،

ولكي تستوعب الفرق بين المجموعات المرتبة والمجموعة المرتبة جيدا أعرض عليك هذا المثال: نأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن تمثيلها على محور الأعداد كما في الشكل:

هل هذه مجموعة مرتبة؟

شكل ٦

ج ـ نعم. هذه مجموعة مرتبة.

س ـ ولماذا؟

س ـ لأننا إذا أعطينا أي عددين منها نستطيع أن نعرف أيهما يقع قبل الآخر (أو أيهما أصغر من الآخر).

ج ـ صحيح. إذا أخذنا أي عددين من المجموعة ص فإن العدد الأكبر هو العدد الذي يقع إلى اليمين. ومع ذلك فهناك فرق حقيقي وجوهري بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية. هل لاحظت هذا الفرق؟

ج ـ الفرق بينهما؟ . . . آه نحن لا نعرف العنصر الأصغر في المجموعة ص.

ج ـ صحيح. هذا هو جوهر الخلاف بين هذه المجموعات. لذلك فنحن نقول إن المجموعة ص مجموعة مرتبة وليست مرتبة جيدا. والمجموعة المرتبة جيدا هي تلك المجموعة التي تكون كل مجموعة جزئية منها غير فارغة ولها عنصر أصغر. هل فهمت الآن الفرق بين المجموعات المرتبة والمجموعات المرتبة جيدا؟

س ـ نعم لقد فهمت الفرق. ولكن لم أفهم بعد فائدة هذا المفهوم. ماحاجتنا للمجموعات المرتبة جيدا؟

ج ـ هذا المفهوم ضروري في الرياضيات لأسباب عديدة. أحد هذه الأسباب يتلخص في أننا نستطيع بواسطة هذا المفهوم تحديد ترتيب الأعداد (الأول، الثاني، الثالث، . . . .) وغير ذلك نستطيع . . .

س ـ هل مازال هناك أشياء كثيرة ممتعة في المجموعات؟ ألم نفسر بعد كل شيء؟

ج ـ كلا نحن لم نفسر بعد كل شيء عن المجموعات. لقد تعرفنا فقط على بعض المفاهيم والرموز الأساسية التي تستخدم في نظرية المجموعات.

س ـ وماذا يجب أن نعرف أيضا عن المجموعات؟

ج ـ يبدو لي أن أحدنا لم يفهم الآخر تماما. فنحن لم نباشر بعد بأي شيء جدي عن المجموعات، حتى أننا لم نتعرف عليها كما يجب.

س ـ وماذا نسمي إذن كل هذا العمل الذي قمنا به حتى الآن؟
وهل يعتبر هذا قليلا لكي نفهم المجموعات؟

ج ـ أعود لأقول لك إننا قد تعرفنا فقط على بعض المفاهيم والرموز الأساسية والضرورية، والتي يمكن استخدامها في كتب الرياضيات و. . . (في الواقع والحق معه فهو قد شعر ببعض الملل. ولذلك فليس من الضروري مضايقته بالتوابع وعمليات بوليا على المجموعات والتعريف الرياضي لعلاقة الترتيب ومفهوم الزمرة والزمرة الجزئية. . . وفي الوقت الذي سوف يتعرف فيه على هذه المفاهيم من مصادر أخرى، وإذا لم يتعرف عليها فهو قادر على الاستمرار في الحياة بشكل جيد بدون هذه المفاهيم. من الأفضل أن أغير موضوع الحديث ولحسن الحظ فإن علم الرياضيات غني بمجالات أخرى ممتعة)

نظرية المجموعات(١):

يمكن التأكيد على أن الرياضيات والفلسفة في كل الأزمنة قد استخدمت وبشكل واع محاكمات نظرية المجموعات بشكل أو بآخر. غير أنه ـ وعبر تاريخ تطور نظرتهم إلى هذه المادة (نظرية المجموعات) لابد من التمييز بدقة بين الأسئلة المرتبطة بمفاهيم الأعداد الرئيسة (والمرتبطة بصورة خاصة بمفاهيم اللانهاية) وبين الأسئلة المرتبطة فقط بمفاهيم الانتماء والاحتواء. فمفاهيم الانتماء والاحتواء قابلة

(١) من كتاب نيكولا بور باكي «نبذة من تاريخ الرياضيات» موسكو ١٩٦٣ ص ٣٧ ـ ٣٨ (Bourbaki N)

للفهم بالبداهة والحدس، ولذلك فهي تبدو أنها لم تمر أبدا بطور من المناقشة والجدل حولها. وحتى نهاية القرن التاسع عشر لم يتعمق أحد في تعريف المجموعة. وعندما نشر كانتور تعريفه الشهير للمجموعة لم يلاق هذا التعريف أي معارضة. ولكن ما إن انضمت مفاهيم الأعداد والمقادير لمفاهيم المجموعات حتى تغير الوضع تغيرا جذريا، فمسألة التقسيم اللانهائي للفراغ قد أدت ـ كما هو معروف ـ إلى تعقيدات ملحوظة في الفلسفة. ثم إنه لم يكن باستطاعة الرياضيات والفلسفة إزالة ذلك التناقض الظاهري حول المقادير المنتهية والمؤلفة من عدد لانهائي من النقط ذات المقادير المعدومة.

الفصل الثاني

الأعداد الطبيعية

- الأعداد الأولية وغير الأولية.
- ما عدد الأعداد الطبيعية؟
- في عالم اللانهايات.
- مجموعة الأعداد الطبيعية.
- المسلمات ـ قواعد اللعب.
- كيف يلعب الرياضيون؟
- العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية.
- محادثة حول الصفر.
- بضع كلمات أخرى عن بقية الأعداد.
- هل يمكن أن يكون ١٠ + ١٠ يساوي ١٠٠؟

الأعداد الطبيعية :

عندما تقرأ العنوان سوف تتساءل بخيبة أمل : ماذا يمكن أن تقول من جديد وممتع بالنسبة للأعداد الطبيعية؟ وقد تكون على حق بعض الشيء . ذلك أن أي إنسان - حتى وإن كان لايدرس ولم يدرس الرياضيات - يعرف الأعداد الطبيعية جيدا . ولكن دعنا ألا نحاول معا سبق الأحداث . لأنك سوف تقتنع قريبا أن الأعداد الطبيعية تستحق اهتماما أكبر بكثير مما تعتقد حتى وإن كان لها عمر طويل تحسد عليه . لقد عرف الأعداد الطبيعية ودرسها فلاسفة العصور القديمة - فلاسفة اليونان - منذ أكثر من ألفي عام لدرجة أن نظرية المجموعات التي لها من العمر حوالي مئة عام فقط تعد طفلا (غريرا) بالمقارنة معها . لذا فالأعداد الطبيعية لاتستحق أن نقومها فقط بشكلها الخارجي المألوف لدينا والمنفر (أحيانا) ، فحتى الرياضيون لم يتمكنوا خلال أكثر من ٢٠ قرنا من دراستها حتى النهاية . فالأعداد الطبيعية بقدمها وبساطتها تذكرنا بأهرام مصر (والحق يقال إننا لانعرف إلا الشيء القليل عن هذه الأهرام رغم الكثير من الكشوف وحل الألغاز المتصلة بها) .

والبدء بدراسة الأعداد الطبيعية مرتبط بتجزئة هذه الأعداد إلى الأعداد الفردية والزوجية والتي تمت في اليونان القديمة . وهكذا . . . . فالأعداد الزوجية هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، . . . .

لنكتب هذه المجموعة بواسطة الرموز . إنها مؤلفة من المجموعة : {٢ ن : ن ∈ ط} ن - هي أي عدد طبيعي ، ط مجموعة الأعداد الطبيعية . ونكتب مجموعة الأعداد الفردية : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . . . بالشكل : {٢ ن + ١ : ن ∈ ط} وهذه المجموعة تقرأ كما يلي :

(اذا اضفنا أو طرحنا من أي عدد طبيعي زوجي العدد ١ نحصل على عدد فردي) . ولكي ندرك الأهمية التي أولاها اليونان لهذا التقسيم للأعداد الطبيعية يمكن أن تتأمل التعريف الذي أعطاه الفيلسوف والرياضي اليوناني أفلاطون (٤٢٧ - ٣٤٧ ق . م) للرياضيات فقد سمى أفلاطون الرياضيات علم

خواص الأعداد الفردية والزوجية .

لقد اظهر الرياضيون منذ القدم خواص وقوانين ممتعة للأعداد الطبيعية لنذكر بعضا من هذه الخواص .

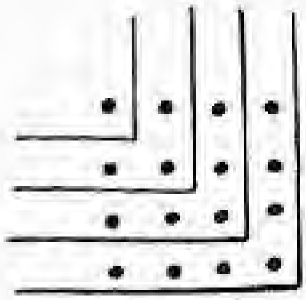
(١) مجموع الأعداد الفردية المتتالية تساوي دوما مربع عدد طبيعي .

أي :

١ + ٣ = ٤ = $٢^{٢}$

١ + ٣ + ٥ = ٩ = $٣^{٢}$

١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦ = $٤^{٢}$



ويصورة عامة :

١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ ن ـ ١) = $ن^{٢}$

١	٢	٣	٤	٥	٦	...	...
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	...	...
٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	...	...
٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	...	...
٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

شكل ٨

(٢) إذا كتبنا جدول الضرب ضمن مربع مفتوح من الطرف الأيسر والأسفل كما في الشكل: ٨ نلاحظ أن عناصر الجدول الموضحة في قطر المربع الكبير هي مربعات الأعداد الطبيعية المتتالية (عناصر القطر كما في الشكل ٨ هي ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ...).

وإذا اخذنا عددين متتاليين على القطر (كالعددين ١ ، ٤ ، أو ٤ ، ٩ أو ٩ ، ١٦) وحددنا أصغر مربع يحويهمافإن حاصل جمع الأعداد الأربعة التي تؤلف هذا المربع هو مربع عدد طبيعي. (إذا كان العددان المتتاليان على القطر هما: ٩ ، ١٦ فأصغر مربع يحويهما هو المربع الموضح على الشكل ويكون ٩ + ١٢ + ١٦ + ١٢ = ٤٩ = ٧^{٢}) وبنفس الشكل نجد:

١ + ٢ + ٢ + ٤ = ٩ = ٣^{٢} أو ١^{٢} + ٢ × ٢ + ٢^{٢} = ٩ = ٣^{٢}

٤ + ٦ + ٦ + ٩ = ٢٥ = ٥^{٢} أو ٢^{٢} + ٢ × ٢ × ٣ + ٣^{٢} = ٢٥

هل تذكرنا هذه النتائج بالمطابقة ب٢ + ٢ ب جـ + جـ٢ = (ب + جـ)٢؟ نعم هي نفسها.

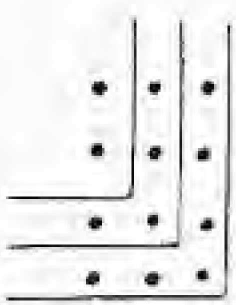
(٣) إن حاصل جمع الأعداد الزوجية ن الأولى تساوي (حاصل ضرب العددين المتتاليين ن ، ن + ١ أي جداء عدد هذه الأعداد بالعدد التالي له

أمثلة:

٢ + ٤ = ٦ = ٢ × ٣ (ن = ٢)

٢ + ٤ + ٦ = ١٢ = ٣ × ٤ (ن = ٣)

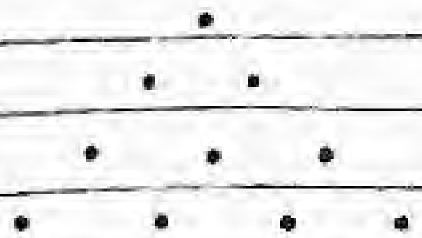
٢ + ٤ + ٦ + ٨ = ٢٠ = ٤ × ٥ (ن = ٤)



وبصورة عامة:

٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ ن = ن (ن + ١)

(٤) سمى اليونان مجاميع الأعداد الطبيعية من الواحد حتى ن بأعداد المثلث، وذلك لأن هذه المجاميع يمكن تمثيلها بنقاط بشكل مثلث متساوي الاضلاع كما يلي:



$١ + ٢ = ٣ = \frac{١}{٢} \times ٢ \; (٢ + ١)$

$١ + ٢ + ٣ = ٦ = \frac{١}{٢} \times ٣ \; (٣ + ١)$

$١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠ = \frac{١}{٢} \times ٤ \; (٤ \times ١)$

وبصورة عامة

$١ + ٢ + ٣ + \ldots\ldots + ن = \frac{١}{٢} \times ن \; (ن + ١)$

ويمكن أن نلاحظ بسهولة وجود رابطة بسيطة بين مربعات الأعداد وبين أعداد المثلث. فمجموع عددين متتاليين من أعداد المثلث يساوي دومامربع عدد طبيعي

مثال (حل تم ١٣)

$١ + ٣ = ٤ = ٢^{٢}$

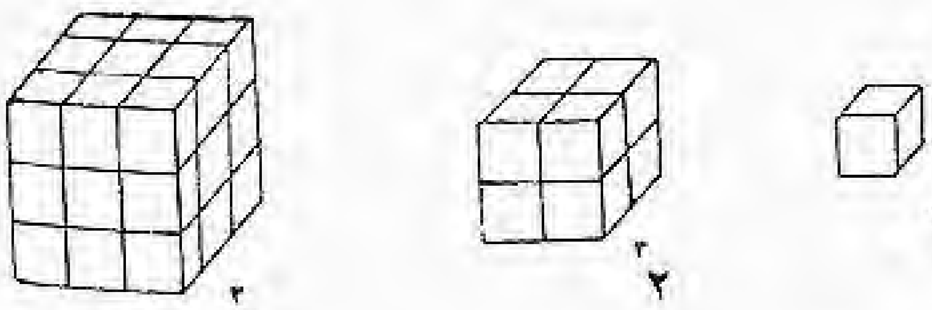
$٣ + ٦ = ٩ = ٣^{٢}$

$٦ + ١٠ = ١٦ = ٤^{٢}$

وضح الحلول السابقة باستخدام الرسم.

(٥) كيف تتشكل مكعبات الأعداد الطبيعية؟

يمكن أن تفهم كيفية تشكل المكعبات بسهولة وذلك باستخدام المكعبات أو بالرسم كما يلي في شكل ١٠:



$٣^{٣}$ $\qquad$ $٢^{٣}$ $\qquad$ $١^{٣}$

(٦) وقد أطلق اليونان اسم الأعداد الكاملة أو المثالية على كل عدد طبيعي يساوي مجموع قواسمه الحقيقية. مثلا: الأعداد ٦ و٢٨ هي أعداداً كاملة أو مثالية ذلك أن قواسم العدد ٦ الحقيقية هي ١، ٢، ٣، ثم إن ٦ = ١ + ٢ + ٣ (لاحظ أن ٦ ليس قاسما حقيقيا للعدد ٦) قواسم العدد ٢٨ الحقيقية هي ١، ٢، ٤، ٧، ١٤، ثم إن ٢٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤

وقد ترك لنا اليونان (في وصيتهم) مشكلتين صغيرتين لم يستطع الرياضيون أن يحلوهما حتى الآن. والمشكلتان صغيرتان وبسيطتان لدرجة أنه بامكان كل واحد منا أن يفهم معناهما وجوهرهما. والمشكلتان هما:

١ ـ أوجد العبارة العامة التي تعطي كل الأعداد الكاملة أو المثالية.

٢ ـ برهن (أو انف صحة القضية) التالية: أن الأعداد الفردية لايمكن أن تكون أعداداكاملة أو مثالية.

ها أنتم أولاء ترون معي أنه رغم مرور ٢٣٠٠ سنة على معرفة الأعداد الكاملة أو المثالية فإنا لم نجد حتى الآن قاعدة عامة يمكن بواسطتها ايجاد كل هذه الأعداد، ولم نستطع أن نعرف ما إذا كان يوجد أعداد كاملة أو مثالية وهي في نفس الوقت أعداد فردية. ولم نتمكن حتى من إثبات عدم صحة هذه القضية.

هناك الكثير من الرياضيين قد عملوا طويلا لحل هاتين المشكلتين ومع ذلك فقد بقوا خارج أسوار المشكلة، وان كان بعضهم قد حصل على بعض النتائج. مثلا العالم الرياضي الشهير أويلر (١٧٠٧ ـ ١٧٨٣) حاول حل المشكلة بشكل جزئي فتوصل إلى النتيجة التالية:

الأعداد الزوجية تكون أعدادا كاملة ومثالية إذن وفقط إذا أمكن كتابتها بالشكل: $٢^{ن}(٢^{ن+١} - ١)$ (ن = ١، ٢، ٣......) حسب $٢^{ن+١} - ١$ عدد أولي.

● ملاحظة: هناك صياغة أخرى أيسر لهذا القانون وهي: $٢^{ن-١}(٢^{ن} - ١)$ حيث ن عدد أولي.

(المحرر)

ها آنذا أقدم لك ـ عزيزي القارىء ـ فرصة ذهبية لدخول التاريخ بتسجيل إحدى النظريات الرياضية باسمك، يمكنك أن تبدأ منذ الآن بحل هذه المشكلة بجرأة.

14 ـ وإذا لم تتمكن من حلها أو لم تحاول حلها فحاول ـ على الأقل ـ أن تجد عددا واحدا كاملا أو مثاليا (طبعاً غير العددين ٦، ٢٨).

الأعداد الأولية:

تقسم الأعداد الطبيعية ـ أيضا ـ إلى أعداد أولية وأعداد غير أولية.

فالأعداد الأولية هي تلك الأعداد التي تقبل القسمة على الواحد وعلى نفسها فقط (أي ليس لها قواسم غير الواحد ونفسها). أما الأعداد غير الأولية فهي بقية الأعداد الطبيعية ماعدا الواحد(٩) والأعداد الأولية. فالأعداد الأولية هي:

٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ....

س ـ هل يمكن أن يكون مربع عدد طبيعي عددا أوليا؟

ج ـ لا.

15-س ـ ولماذا؟ ـ (حاول عزيزي القارىء الإجابة على السؤال) لنعد إلى الأعداد الأولية:

تبرز هنا مسألتان ـ كما في الأعداد الكاملة أو المثالية ـ مرتبطتان بايجاد هذه الأعداد وهما:

(١) كيف نجد صيغة عامة أو قاعدة عامة (الحد العام) لحساب العدد الأولي؟

(٢) ماعدد الأعداد الأولية الموجودة؟

لقد أوجد العالم اليوناني الجغرافي والرياضي الشهير ايراتوسفين (قرنان قبل

---

(٩) العدد واحد لايعتبر أوليا، ولايعتبر غير أولي (فليس له أي قواسم غير الواحد نفسه).

الميلاد) جوابا للسؤال الأول بابتكاره طريقة يمكن بواسطتها الحصول على الأعداد الأولية.

لقد كتب ايراتوسفين الأعداد الطبيعية في شبكة كما في الشكل.

وبعد أن (اسقط) من الشبكة الأعداد غير الأولية (وفق طريقته التي سنشرحها فيما بعد) بقي في الشبكة الأعداد الأولية فقط.

٦	٥	٤	٣	٢	١
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧
١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
٢٤	٢٣	٢٢	٢١	٢٠	١٩

(لذا دعيت هذه الشبكة بشبكة ايراتوسفين) (أو جدول أو غربال ايراتوسفين).

أما طريقة أيراتوسفين في الحصول على الأعداد الأولية فتتلخص بما يلي:

لقد كتب أولا الأعداد الطبيعية كلها في الشبكة (بدون الواحد) ولنكتبها نحن في سطر كما يلي:

(٢) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ...... ثم نشطب من هذه الأعداد مضاعفات العدد ٢ (ونحذف الواحد أيضا) نجد:

(٣) ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، ١٧، ١٩، ٢١، ٢٣، ٢٥، ٢٧، ....

ثم نشطب من هذه الاعداد مضاعفات العدد ٣ (ونحذف الواحد أيضا) نجد:

(٥) ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٥، ..... ثم نشطب من هذه الأعداد مضاعفات العدد «٥» (ونحذف الواحد ايضا) نجد:

(٧)، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ....

وهكذا نحصل على الأعداد الأوليه التي هي بدايات النواتج التي حصلنا عليها بعد كل عملية شطب وهي : ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، . . . .

أما السؤال الثاني (ماعدد الأعداد الأولية الموجودة؟) فقد أجاب عليه العالم الرياضي العظيم أقليدس بجواب ذكي جدا.

للحصول على عدد الأعداد الاولية ناقش أقليدس (١٠) الموضوع - تقريبا - بالشكل التالي:
«يجب أن نضرب كل الأعداد الأولية المعروفة ببعضها ثم نضيف إلى ناتج الضرب العدد واحد. إذا نتج لدينا بعد ذلك عدد أولي فسوف يكون أكبر عدد أولي معروف لدينا. أما إذا كان عددا غير أولي فإننا سوف نجد له قاسما يختلف عن الأعداد الأولية التي نعرفها. ذلك أنه إذا قسمنا هذا العدد على اي عدد أولي نعرفه فسوف يبقى لدينا الواحد الذي أضفناه لدى تشكيل العدد نفسه، وبالتالي يوجد عدد اولي أكبر من اي عدد أولي نعرفه».

وفقا لمناقشة أقليدس، فإنه مهما يكن لدينا من الأعداد الأولية المعروفة فإننا نستطيع دوما أن نحصل على عدد أولي جديد. وبما أنه يمكن تكرار هذه العملية باستمرار نستطيع أن نصل إلى النتيجة التالية بسهولة: ان مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة لانهائية.

يتبين لنا من طرق ابراتوسفين وأقليدس مايتميز به رياضيو اليونان القدامى، فهؤلاء الرياضيون لم يحبوا الحسابات كثيرا، ولم يقوموا بحسابات تطبيقية ذات أهمية كبيرة كقياس حجم الأرض وما شابهها (على عكس المصريين مثلا الذين اهتموا كثيرا بهذه الأمور). فعلماء اليونان أحبوا طرح المشكلة ثم حلها بطريقة المناقشة. وباستخدام هذه الطرائق في الحل حصلوا على نتائج كبيرة في الرياضيات والفلسفة.

---

١٠ - عاش أقليدس حوالي ٣٣٠ إلى ٢٧٥ سنة قبل الميلاد.

ولكي نتعرف بشكل أفضل على كيفية حل رياضي اليونان القدامى للمشاكل التي تعترضهم، سوف نتحدث عن واحد منهم وهو الرياضي الشهير طاليس(١١): عندما زار طاليس مصر أعجب به الكهنة المصريون، وأعجبوا بطريقته المبتكرة في حل المسائل التي عرضوها عليه. ولكي يختبروا حكمة هذا الضيف اليوناني قرروا أن يطرحوا عليه مسألة رياضية حقيقية فأخذوه إلى أكبر الأهرام في الصحراء وطلبوا منه قياس ارتفاعه. كان الكهنة متأكدين من أن هذا العالم الغريب لن يتمكن من حل المشكلة. ولكن الرياضي اليوناني لم يرتبك. بعد تفكير قصير طلب منهم أن يحضروا له عصا. أحضر الكهنة العصا للضيف اليوناني معتقدين أنه سوف يتسلق الهرم ويبدأ بقياس ارتفاعه بشكل عملي مستخدما لذلك العصا التي طلبها. ولكن طاليس لم يخطر بباله مثل هذا العمل أبدا، فقد أخذ العصا وغرزها بالرمل ثم قال للكهنة: عندما يصبح طول ظل العصا مساويا لطولها، قيسوا طول ظل الهرم وسوف تحصلون على طول ارتفاعه!

دهش الحكماء المصريون من بساطة وذكاء هذه الطريقة التي اتبعها طاليس في حل مسألة صعبة ومعقدة مثل مسألة قياس ارتفاع الهرم مما اضطر الكهنة المصريين للاعتراف بأن اليونانيين رياضيون ممتازون. وفي واقع الأمر فإن رياضيي اليونان قد اغنوا رياضيات ذلك العصر بمعارفهم الكثيرة.

هناك الكثير يمكن قوله حول رياضيي اليونان القدامى غير أنني اكتفي بهذا. فقد (ثرثرت) لدرجة أنني كدت أنسى المشكلة التي لم نحلها بعد، وهي ايجاد صيغة أو قانون عام يعطي الأعداد الأولية (ذلك أن ايراتوسفين ابتكر طريقة لايجادها، ولكن لم يتوصل إلى قاعدة عامة أو قانون عام لايجادها كلها). والرد على هذه المشكلة بسيط جدا: الرياضيون لم يضعوا بعد ولم يتوصلوا إلى مثل هذه

---

١١ ـ العالم طاليس اليوناني (النصف الثاني من القرن السابع قبل الميلاد) ـ فيلسوف فلكي فيرياني، ورياضي. وهو أحد الحكماء السبعة للعصور القديمة ويعد أول فيلسوف أوروبي. (Talis)

القاعدة . . فهناك الكثير من الرياضيين حاولوا ايجادها مستخدمين لذلك طرائق مختلفة ومن الصعب معرفة عدد هؤلاء الرياضيين . ومع ذلك فلم يعترف أحد منهم (أو لم يصرح) بأنه لايمكن ايجاد صيغة عامة تعطي جميع الأعداد الأولية إنما أرجعوا عدم توصلهم لمثل هـذه الصيغة إلى احتمال ارتكابهم خطأ ما في الحسابات .

حتى العالم الرياضي الفيزيائي فرما (١٢) (١٦٠١ ـ ١٦٦٥) قد ارتكب خطأ عندما ظن أنه قد توصل إلى الصيغة العامة لحساب هذه الأعداد وهي :

$ف(ن) = ٢^{٢^{ن}} + ١$ حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ . . . والتي حصل منها على الأعداد التالية :

من أجل ن = ١ $ف(١) = ٢^{٢} + ١ = ٤ + ١ = ٥$

من أجل ن = ٢ $ف(٢) = ٢^{٤} + ١ = ١٦ + ١ = ١٧$

من أجل ن = ٣ $ف(٣) ٢^{٨} + ١ = ٢٥٧$ . . . . . .

والأعداد ف(١)، ف(٢)، ف(٣)، ف(٤)، . . . ، ف(ن)، . . سميت بأعداد فرما .

ولكن فرما نفسه لم يبرهن ان ف(ن) عدد أولي من أجل كل قيم ن فقد تبين فيما بعد أن اعداد فرما ليست جميعها اعدادا أولية فمن أجل :

ن = ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٣ ، ٣٦ ، ٣٨ ، ٧٣

ف(ن) عدد غير أولي . إضافة لذلك فإنه في حالة ن عدد مؤلف من ثلاث أرقام لايمكن التأكد عمليا من صحة العبارة ف(ن) وفيما إذا كان العدد الناتج عددا أم لا ، وذلك أن ف(ن) يكتب بواسطة مليون رقم .

ومع أن فرما لم يجد صيغة عامة للأعداد الأولية إلا أن أبحاثه قد أدت إلى كشف بعض الخواص المتممة لبعض الزمر من الأعداد الاولية مثلا :

---

(١٢) فرما ـ مؤسس نظرية الأعداد (١٦٠١ ـ ١٦٦٥) (Fermat p .)

لقد برهن فرما على أن: كل عدد أولي يمكن كتابته بالشكل ٤ ن + ١ يساوي مجموع مربعي عددين طبيعيين. لننظر الى بعض الأمثلة:

ن = ١   ٤ × ١ + ١ = ٥ = ١^{٢} + ٢^{٢}

ن = ٣   ٤ × ٣ + ١ = ١٣ = ٩ + ٤ = ٣^{٢} + ٢^{٢}

ن = ٤   ٤ × ٤ + ١ = ١٧ = ١ + ١٦ = ١^{٢} + ٤^{٢}

ن = ٧   ٤ × ٧ + ١ = ٢٩ = ٤ + ٢٥ = ٢^{٢} + ٥^{٢}

والمشكلة الثانية التي بحث فيها فرما هي مايلي: هل توجد مجموعة لانهائية من الأعداد الأولية التي يمكن كتابتها بالشكل ن^{٢} + ١؟

تبدو هذه المشكلة بسيطة، ومع ذلك فما زالت مشكلة قائمة لم يتوصل أحد إلى حلها.

فمـن اجـل

ن = ١ نجد ١^{٢} + ١ = ٢ عدد أولي

ن = ٢ نجد ٢^{٢} + ١ = ٥ عدد أولي

ن = ٤ نجد ٤^{٢} + ١ = ١٧ عدد أولي

(من اجل **ن = ٣ نجد ٣^{٢} + ١ = ١٠** عدد غير أولي)

إذن فقد أصبح معروفا لدينا ـ وفق دراسات سابقة ـ أنه توجد مجموعة لانهائيةمن الأعداد الأولية، ولكننا نجهل ما إذا كانت مجموعة الأعداد الأولية من الشكل ن^{٢} + ١ هي مجموعة لانهائية.

وهناك مشكلة أخرى شهيرة لفرما. هذه المشكلة لاتتعلق بالأعداد الأولية ولكنها تتعلق بالأعداد التي نعرفها. ولذا فهي تستحق الذكر هنا. هذه المشكلة تسمى النظرية العظيمة لفرما.

ظهرت هذه النظرية في أواسط القرن السابع عشر الميلادي، ولم يستطع أحد أن يبرهن عليها حتى الآن، رغم أن الكثير من الرياضيين قد حاولوا البرهنة

عليها. وقبل أن نتعرف على هذه النظرية لابد من أن نتذكر بعض المفاهيم التي تعرفها... (عزيزي القارىء).... ولاشك، وبالتحديد: نظرية فيثاغورس التي تنص على أن مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين.

إذا رمزنا لطولي الضلعين القائمين بـ س، ع ولطول الوتر بالرمز ص تستطيع أن تكتب النظرية بشكل رمزي كما يلي:

ص٢ = س٢ + ع٢

وليس هناك من صعوبة في ايجاد أعداد طبيعية تحقق هذه العلاقة. والثلاثيات س، ع، ص من الأعداد التي تحقق العلاقة تسمى ثلاثيات فيثاغورس. وهناك قاعدة بسيطة يمكن بواسطتها ايجاد ثلاثيات فيثاغورس س، ع، ص والقاعدة هي كما يلي:

من أجل أي عددين طبيعيين ب، جـ بحيث ب > جـ نجد ثلاثية فيثاغورس س، ع، ص حيث: س = ب٢ - جـ٢ ، ع = ٢ ب جـ ، ص = ب٢ + جـ٢

لنشكل بعض الثلاثيات وفق الجدول التالي:

ب	ج	س	ع	ص	س٢ + ع٢ = ص٢
٢	١	٣	٤	٥	٣٢ + ٤٢ = ٥٢
٣	١	٨	٦	١٠	٨٢+٦٢= ١٠٢
٣	٢	٥	١٢	١٣	٥٢+١٢٢= ١٣٢
٤	١	١٥	٨	١٧	١٥٢+٨٢= ١٧٢
٤	٢	١٢	١٦	٢٠	١٢٢+١٦٢= ٢٠٢
٤	٣	٧	٢٤	٢٥	٧٢+٢٤٢= ٢٥٢
٥	١	٢٤	١٠	٢٦	٢٤٢+١٠٢= ٢٦٢
٥	٢				
....	..	..	..	..	....

واضح أن المجموعة التي تؤلفها هذه الثلاثيات هي مجموعة لانهائية. وهذه العلاقة كانت معروفة لدى رياضيي اليونان القدامى بما فيهم فرما، ولكن فرما لم يهتم فقط بهذه العلاقة التربيعية، وإنما أثاره أيضا السؤال التالي: هل تصح هذه العلاقة من أجل قوى أكثر من القوة ٢؟ أي هل يمكن ايجاد ثلاثية أعداد طبيعية س. ع. ص تحقق العلاقة:

$$س^{ن} + ع^{ن} = ص^{ن} \quad حيث \quad ن \in ط$$

ومن أجل ن = ٣ مثلا يمكن صياغة السؤال على الشكل التالي: «هل يمكن أن نجد ثلاثة أعداد طبيعية بحيث إن مجموع مكعبي اثنين منهما يساوي مكعب العدد الثالث؟»

أو باختصار: «هل يوجد ثلاثة أعداد طبيعية س، ع، ص تحقق العلاقة: س٣ + ع٣ = ص٣؟»

والمطلوب هنا أن نجد ثلاثية واحدة ـ ليس اكثر ـ تحقق هذه العلاقة التي تسمى نظرية فرما الكبيرة. (بالمناسبة توجد أيضا نظرية فرما الصغيرة، ولكن بما أننا ـ نحن وأنت ـ عزيزي القارىء ـ رياضيون عظماء فلن نشغل أنفسنا بالبحث في المشاكل الصغيرة!!). هناك فكاهة مرتبطة بهذه النظرية وباسم فرما بالذات، تزعج الرياضيين وحتى وقتنا الحاضر لذا فسوف أحكيها لكم هنا:

من المعروف أن فرما كان يحب الكتابة والتعليق على هوامش الصفحات التي يقرؤها: ولقد كتب على حاشية هامش إحدى الصفحات مايلي: «أنا متأكد من أنني قد وجدت حلا رائعا لهذه النظرية، ولكن هذا الحل لايمكن كتابته على هامش الصفحة لأنها صغيرة ولاتتسع له!!!».

تصور معي عزيزي القارىء أي خدمة عظيمة كان يمكن أن يقدمها فرما للرياضيين لو أن هامش هذه الصفحة كان أكبر قليلا، وكم اقتصد للرياضيين من جهد خلال مئتين من السنوات؟ ذلك أنه للآن لاتوجد ثقة عند أحدهم من امكانية حل هذه (المشكلة). ومع ذلك فلا يستطيع أي رياضي أن يمر أمام هذه

المشكلة المطروحة ببساطة متجاهلا وجودها، لأن مثل هذا العمل يتنافى مع فهمه للشرف العلمي الذي يقتضي ضرورة العمل على حل أي مشكلة علمية تعترضه. (عندما يدور الحديث حول الرياضيين لابد لنا من الاعتراف من أنهم يبقون إلى النهاية محافظين على الشرف العلمي مهما كلفهم هذا من الجهد ومن الوقت). ويمكن تصور درجة صعوبة نظريةفرما هذه من جواب جلبرت - أحد عظماء رياضيي القرن العشرين - عن السؤال التالي:

لماذا لم يعمل (اي جلبرت) على حل مشكلة - أو نظرية - فرما؟.

فقد أجاب جلبرت بقوله: «قبل حل هذه المشكلة كان يجب علي وخلال سنوات ثلاث أن أتعرف عليها فقط، وليس لدي مثل هذا الوقت الكبير لاضيعه في البحث عن الحلول الممكنة لهفوات فرما».

أثرت نظرية فرما تأثيرا كبيرا على تطور الرياضيات في نهاية القرن الثامن عشر، في ذلك الوقت الذي أجبر فيه الرياضيون على بناء نظرية الأعداد تلك النظرية التي ساعدتهم في الإجابة على مجموعة أسئلة أخرى (غير مشكلة فرما)، وكانت - بالتالي - خطوة كبيرة في طريق البحث عن خواص الأعداد. وهكذا ترون أنه قدتحققت في عالم الأبحاث الرياضية الحكمة القائلة «جرى وراء الأرنب فاصطاد دبا».

ما ذكرناه حتى الآن هو جولة قصيرة في تاريخ بناء نظرية الأعداد، وسوف نختتم هذه الجولة ببضع كلمات من مقدمة كتاب (المدخل إلى نظرية الأعداد) للرياضي الإنكليزي ديكسون: «خلال عشرين قرنا من الزمان كانت الأعداد أحب المواد إلى الباحثين ليس فقط من الرياضيين الأوائل وإنما لآلاف الهواة أيضا. والابحاث الجديدة لاتقل عن الأبحاث القديمة بشيء، والاكتشافات التي ستتم في المستقبل (بفضل الأبحاث الجديدة والمستمرة) سوف تفوق تلك التي تمت حتى الآن»

سوف نقتصر نحن على التعرف على بعض خواص الأعداد الطبيعية تلك

الخواص التي اكتشفت في السنوات المئة الأخيرة ولم تكن معروفة لرياضيي الإغريق القدامى. ونحن واثقون أن أكثر الاكتشافات متعة مازالت أمامنا ولم تكتشف بعد.

ما عــدد الأعــداد الطبيعيــة؟

لقد شغل هذا السؤال الرياضيين منذأقدم العصور، فقد فهموا أن الأعداد الطبيعية كثيرة وكثيرة جدا، ولكن ماشغلهم هو تحديد كمية هذه الأعداد بدقة. مثلا: الرياضي الفيزيائي الاغريقي الشهير أرخميدس (الاغريق مرة أخرى هنا) برهن في كتابه «عدّاد الرمل»، وذلك في القرن الثالث قبل الميلاد، أن عدد ذرات الرمل على شاطىء البحر يمكن أن نمثلها بمجموعة الأعداد الطبيعية إذا أدخلنا رمزاللتزايد التدريجي للأعداد الطبيعية. ثم إن الفيلسوف أفلاطون وضع الفرضية التالية: لايوجد نهاية للأعداد الطبيعيـة (أولا يمكن الانتهاء من عد الأعداد الطبيعية). ولقد رأينا سابقا كيف أن أقليدس العظيم قد برهن على أن الأعداد الأولية (وهي أعداد طبيعية أيضا) عبارةعن مجموعة لانهائية.

وبهذا الشكل يمكننا أن نقترب بواسطة الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، . . . . . من أهم مفهوم في الرياضيات وهو مفهوم اللانهائية وبتحديد أكبر - مفهوم اللانهائية الكبيرة - وكما يبدو لنا أنه يجب دراسة هذا المفهوم ليس فقط بسبب أهميته بالنسبة للرياضيات، ولكن لأنه ينقلنا إلى عالم جديد غير مألوف (عالم اللانهايات)، ولايمكن تصوره أو ملاحظته، والذي يمكن - إضافة لذلك - التعرف عليه جزئيا بواسطة قواعد منطقية لبناء الاستنتاجات العقلية المنطقية.

وباعطائنا هذا المفهوم - اللانهاية - الأهمية الكافية نتأكد من انه يجب عدم الاعتماد دوما على «تفكيرنا السليم» فقط «ذلك التفكير الذي نفخر به ولم نشك في وجوده» ويجب، كذلك، عدم الاقتصار على البراهين المبنية على الملاحظة فقط والمؤسسة وفق المبدأ التالي «أصدق فقط ما أراه».

عالم اللانهايات :

كيف يمكن أن نفهم أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة لانهائية؟ للإجابة على هذا السؤال نحاول النظر إلى كيفية انشاء الأعداد الطبيعية في تسلسلها الطبيعي . الأعداد تبتدىء -طبعاً- من الواحد(١٣) :

١	واحد	عدد طبيعي وبإضافة ١ نجد :
١+١=٢ اثنين		عدد طبيعي وبإضافة ١ مرة أخرى نجد :
٢+١=٣ ثلاثة		وبإضافة العدد ١ مرة أخرى للناتج نجد :
٣+١=٤ أربعة		

. . . وهكذا بإضافة العدد ١ للناتج نشكل الأعداد الطبيعية في تسلسلها الطبيعي . والعدد ٣ الناتج عن العدد ٢ بإضافة الواحد له نسمي العدد التالي للعدد ٢ . وإذا تجاهلنا الأعداد الطبيعية الألف الأولى ثم طبقنا نفس القاعدة لايجاد العدد التالي للألف نجد أن العدد التالي هو: ١٠٠٠ + ١ = ١٠٠١ . إذن لكل عدد طبيعي - مهما يكن كبيراً- عدد تال له مباشرة . وهذا يعني أنه إذا كان لدينا عدد طبيعي ن فإن العدد التالي له هو ن+١ والتالي له هو (ن+١) + ١ . . .

يتضح مما سبق أنه يمكن دوما الحصول على عدد طبيعي له أي قيمة مهما تكن كبيرة . وإذا أخذنا بعين الاعتبار إمكانية تكرار هذه العملية الحسابية مرات كثيرة (أي عملية إضافة الواحد للناتج) والمطبقة في ظروف متشابهة ، فإننا نستطيع أن نؤكد أنه لا يوجد أي مبرر يدعونا لأن نتوقف عن هذه العملية في وقت ما من الأوقات أو في مرحلة ما من المراحل أي أن الانتقال من عدد طبيعي إلى عدد طبيعي آخر غير محدود وبالتالي فنحن نحصل بذلك على مجموعة غير نهائية من الأعداد الطبيعية إذا كنت قد فهمت - عزيزي القارىء- كل ما قيل جيداً،

---

(١٣) نذكر أن مؤلف الكتاب يعتبر أن الصفر ليس عددا طبيعيا وهذا الاعتبار يأخذ به الكثير من علماء الرياضيات (المترجم)

يمكنك الإجابة على السؤالين التاليين (أو حاول الإجابة عليهما):

16 ـ هل يوجد عدد طبيعي أكبر (أكبر عدد طبيعي)؟

17 ـ هل يوجد لكل عدد طبيعي عدد طبيعي سابق؟

مجموعة الأعداد الطبيعية:

إن الأعداد الطبيعية تؤلف مجموعة نسميها «مجموعة الأعداد الطبيعية» ونرمز لها بالرمز ط. ومجموعة الأعداد الطبيعية تختلف عن المجموعات التي تعاملنا معها سابقا (مجموعة الطلاب في الصف، مجموعة العواصم، مجموعة الأعداد من الواحد حتى العشرة. . . .) فهذه المجموعات كلها مجموعات منتهية، أما مجموعة الأعداد الطبيعية فهي مجموعة غير منتهية وهذان نوعان من المجموعات يختلفان عن بعضهما اختلافاً كبيراً. لذلك يجب أن نكون حذرين جداً ولاننقل بشكل ميكانيكي خواص المجموعات المنتهية إلى المجموعات غير المنتهية، لأنه إذا فعلنا ذلك فقد نقع في مأزق لانهاية له، بحيث لانجد مخرجا يمكننا من الخروج منه. ولكننا ـبالطبع ـ لن ندرس كل شيء من البداية، أي لن نعيد ما درسناه على المجموعات المنتهية حرفياً، وبالتفصيل على المجموعات غير المنتهية مادامت العمليات الأساسية المعروفة (الاجتماع (الاتحاد)، التقاطع، الفرق، . . .) معرفة على المجموعات المنتهية وغير المنتهية بنفس الشكل.

لقد توصلنا سابقاً إلى أن الأعداد الطبيعية المختلفة تتمتع بصفات عامة محددة منها: أن الأعداد الطبيعية يمكن أن تكون فردية، أو زوجية، أولية، أو غير أولية، . . . وإذا تحدثنا بلغة المجموعات نستطيع أن نقول إن هذه الأعداد (الفردية أو الزوجية أو الأولية أو غير الأولية) يمكن أن تؤلف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية، إضافة لذلك فإن كل واحدة من هذه المجموعات هي مجموعة جزئية حقيقية ـ أي غير خالية.

لننظر الآن إلى «غرائب» المجموعات غير المنتهية موضحين بذلك أوجه الخلاف بينها وبين المجموعات المنتهية. ولنأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية كمثال

على مجموعة غير منتهية:

{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ...}

إذا أخذنا من هذه المجموعة كل الأعداد الزوجية فإن هذه الأعداد تؤلف مجموعة جديدة وهي مجموعة جزئية حقيقية من مجموعة الأعداد الطبيعية وهي:

{٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ...}

انظر الآن بإمعانٍ إلى كل من المجموعتين: مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية وحاول الإجابة على السؤال التالي:

س - هل مجموعة الأعداد الزوجية جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية؟

ج - بالتأكيد. هذا واضح تماماً ومباشر بالنظر إليهما.

ج - لا أمانع. فمجموعة الأعداد الزوجية جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية لأن مجموعة الأعداد الطبيعية تحوي في داخلها كل الأعداد الزوجية وبعض الأعداد الأخرى (أي الأعداد الفردية). إذن نحن متفقان في الإجابة على السؤال. لدينا الآن سؤال آخر وهو أي الأعداد أكثر بعددها: مجموعة الأعداد الطبيعية* أو مجموعة الأعداد الزوجية؟.

س - الأعداد الطبيعية أكثر طبعا من الأعداد الزوجية وهذا واضح، لأن الأعداد الطبيعية تحوي الأعداد الزوجية والأعداد الفردية أيضاً.

ج - ...... الجواب عقلاني بدون شك ويعتمد على تفكير سليم: فالأعداد الزوجية جزء من الأعداد الطبيعية، والجزء أصغر من الكل. إذن يجب أن تكون الأعداد الزوجية أقل من الأعداد الطبيعية. وهذه النتيجة تبدو لنا للوهلة الأولى طبيعية جداً وهي تتوافق أيضاً مع خبراتنا التي اكتسبناها في

---

* تذكّر أن المؤلف لا يعتبر «الصفر» عدداً طبيعياً كما يفعل آخرون، والموقف مجرد اتفاق لا أكثر.

[المحرر]

كل حياتنا وفي جميع المجالات. ومع ذلك ودرءاً لكل الاحتمالات المفاجئة ومن أجل التأكد لنحاول التحقق من هذه النتيجة.

س - وكيف يمكن التحقق من صحة هذه النتيجة؟.

ج - بطريقة بسيطة جداً وهي طريقة الراعي الأمّي الذي يتحقق من تواجد كل الأغنام في القطيع بدون أن يلجأ للعد. فهو يعتمد على الطريقة التالية: عندما تخرج الأغنام من الحظيرة صباحاً، يضع حبة فول أو حمص أو فاصولياء في كيس معين لدى خروج كل شاة (يقابل كل شاة تخرج بحبة فول في الكيس). وعند عودة القطيع يقوم بإخراج حبة فول من الكيس كلما دخلت شاة إلى الحظيرة فإذا دخل كل القطيع وبقيت لديه حبة فول في الكيس يجري في المرعى باحثاً عن الشاة المفقودة.

واضح أن هذه العملية تصلح من أجل أي مجموعة منتهية أو غير منتهية (وهذه هي عملية التقابل الثنائية بين مجموعتين). لنستخدم هذا التقابل الثنائي بين رئيس المجموعتين غير المنتهيتين (الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية) لمعرفة أيها أكبر (هل تبقى حبات من الفول في الكيس!.)...

للقيام بذلك نقابل كل عدد طبيعي بعدد زوجي موافق ولنر ما إذا كان أحدهما أكثر من الآخر لنبدأ كما يلي:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	.....
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	.....

ج - ماذا حصل ؟ ما النتيجة التي توصلنا إليها؟ هل ..

س - نعم نعم... كل عدد طبيعي يمكن مقابلته بعدد زوجي موافق وهذا يعني....

ج - نعم تماماً كما اعتقدنا. الأمر غريب حقاً ولكن الحقيقة تبقى حقيقة. للأعداد الزوجية نفس عدد الأعداد الطبيعية.

س ـ نعم . . . ولكن الأعداد الزوجية جزء فقط من الأعداد الطبيعية؟.

ج ـ نعم الأعداد الزوجية جزء من الأعداد الطبيعية.

س ـ والنتيجة . . . .

ج ـ لا تخجل. النتيجة في هذه الحالة هي أن الجزء يساوي الكل، وهذه أول مفاجأة لنا لعالم اللانهايات.

ج ـ يمكن أن تكون القاعدة : أن الجزء يساوي الكل صحيحة فقط في حالة الأعداد الطبيعية، والأعداد الزوجية. يمكن أن تكون الأعداد الزوجية حالة شاذة (خاصة)، ولكن الحالة الشاذة ـ كما نعلم ـ تؤكد قاعدة معينة ـ هل يحاول أحد أن يدافع عن «التفكير السليم» بعد ذلك؟؟.

ولكن لا . إن هذه الحادثة ليست حالة خاصة وليست شاذة، وإنما هي قاعدة. وتوجد أمثلة كثيرة تؤكدها.

لنأخذ مثلاً كل الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥ :

٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	...

ونقارنها بالأعداد الطبيعية كما فعلنا في حالة الأعداد الزوجية نجد:

١	٢	٣	٤	٥	٦	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	...

نحصل على نفس النتيجة : فاتين المجموعتين نفس العدد من العناصر، مع أن المجموعة الثانية (الأعداد التي تقبل القسمة على ٥) هي جزء حقيقي من المجموعة الأولى (الأعداد الطبيعية). وللتأكد من ذلك بشكل أكبر نأخذ مثالاً ثالثاً:

لنأخذ الأعداد التي تقبل القسمة على ١٠٠ ونقارنها بمجموعة الأعداد الطبيعية. هل يمكن أن تكون مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ١٠٠ أقل

من مجموعة الأعداد الطبيعية؟ لنر ذلك بالمقارنة:

١	٢	٣	٤	٥	٦	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	...

أعتقد أنه لا حاجة بنا لأن نحاول أكثر من ذلك، واضح تماماً أننا حصلنا على نفس النتيجة السابقة حتى ولو قارنا مجموعة الأعداد المؤلفة من أرقام كثيرة وتقبل القسمة على مليون لحصلنا على نفس النتيجة:

عدد عناصر مجموعة الجزء يساوي عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية وكل منها مجموعة لانهائية.

18 ـ لذلك فقد وصلنا إلى **النتيجة التالية**: كل المجموعات اللانهائية لها نفس العدد من العناصر، والجزء منها يساوي الكل (الجزء اللانهائي)*. لا يمكن أن نفعل أي شيء، ولا يوجد أحد يستطيع أن يتهمنا أننا لم نحاول انقاذ «تفكيرنا السليم». وبما أن الأمر كذلك في المجموعات اللانهائية فلنحاول هنا الترفيه عن أنفسنا على حساب هذه الخاصة الغريبة (وغير العادية) للانهائيات.

لنتصور الآن فندقا يحوي عددا لا نهائيا من الغرف

=====================================

إن مثل هذا الفندق لايمكن رسمه، وهذا غير ضروري هنا. لنتصور معاً أن كل الغرف في الفندق مفردة ـ لشخص واحد ـ وأن كل الغرف مشغولة، ولكن

---

* الصحيح هنا هو القول بأن «الجزء يكافئ الكل» لا يساويه إذ إن للمجموعات المتساوية معنى محددا، ولكننا غضضنا الطرف هنا عن القول بأن «الجزء يساوي الكل» وذلك لأن هذا التعبير كان مستخدما في الماضي قبل كانتور الذي أعطى معنى محددا للتساوي والتكافؤ.

[المحرر]

غرفة رقماً ـ كالمعتاد ـ:

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ...

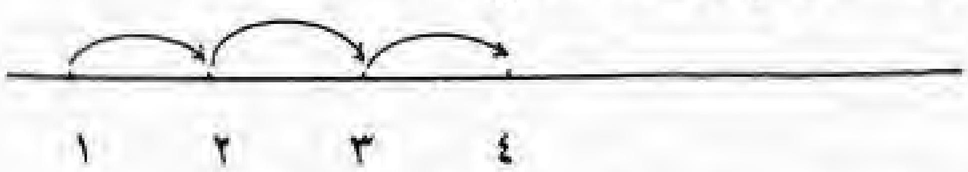
الغرف كلها مشغولة ـ إذن في الفندق يوجد عدد لانهائي من النزلاء!

ولكن ـ للحظ السيء ـ يصل الفندق شخص مهم جداً لا تستطيع إدارة الفندق أن تعلن له ببساطة: للأسف لا يوجد غرف فارغة. ابحث لنفسك عن غرفة في فندق آخر.

هذه الشخصية مهمة ويجب على الإدارة أن تعطيه غرفة بأي شكل وبحيث لا تضطر لطرد أحد من نزلاء الفندق. مدير هذا الفندق الغريب لم يتذمر أبداً بل قال للشخص المهم «أرجو أن تنتظر بعض الوقت لنجد لك غرفة». فماذا يفعل المدير؟.

المدير يطلب من نزلائه ـ بعد شديد الاعتذار ـ أن ينتقل كل منهم من غرفته إلى الغرفة التالية لها، أي ينتقل نزيل الغرفة ١ إلى الغرفة ٢ ونزيل الغرفة ٢ إلى الغرفة ٣ ....

ماذا يريد المدير من وراء هذا العمل؟....



يحصل المدير على الغرفة الأولى الفارغة لينزل بها الشخص المهم.

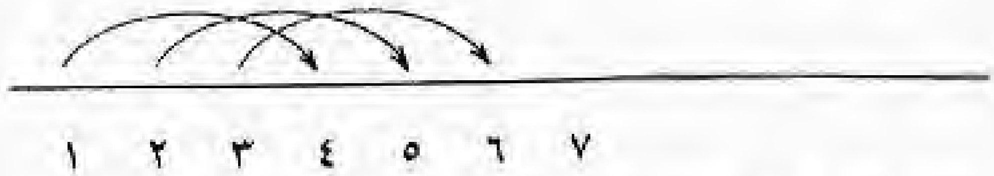
أرجو ألا تسألني: ماذا حدث للزائر الساكن في الغرفة الأخيرة؟؟؟ الإدارة تعرف جيداً خواص فندقها وقد حل المدير المشكلة بدون تعب وبدون أي تفسير.

ماذا يحدث لو حضر إلى الفندق ثلاثة أشخاص آخرون؟

سوف يحل المدير المشكلة أيضاً بكل سهولة وبنفس الطريقة أي:

بنقل نزلاء الغرف ١، ٢، ٣، إلى الغرف ٤، ٥، ٦
وينقل نزلاء الغرف ٤، ٥، ٦، إلى الغرف ٧، ٨، ٩

وهكذا . . . فيفرغ لديه الغرف الثلاث الأولى حيث يتمكن من وضع النزلاء الجدد.

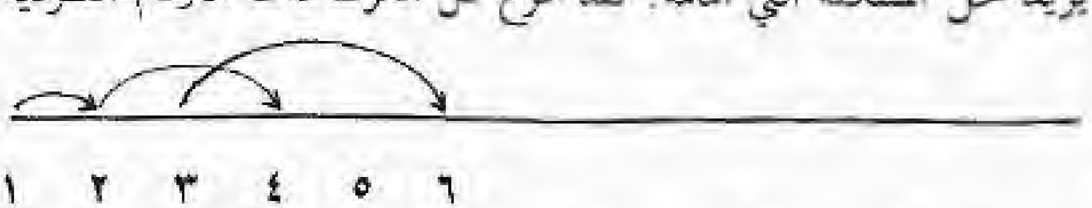


في اليوم التالي ظهرت أمام الإدارة مشكلة أكثر صعوبة: لقد حضر إلى الفندق عدد لا نهائي من النزلاء الجدد، فماذا يفعل مدير الفندق في هذه الحالة؟ وأين يضعهم؟.

بعد أن «حكّ» المدير رأسه مفكراً قليلاً، وشرب كوب عصير بارد. . . . فكر ثم اتخذ القرار التالي:

ينقل نزيل الغرفة	١	إلى الغرفة	٢
نزيل الغرفة	٢	إلى الغرفة	٤
نزيل الغرفة	٣	إلى الغرفة	٦
نزيل الغرفة	٤	إلى الغرفة	٨

هل فهمت ماذا يفعل المدير؟. . . . .
لقد نقل نزلاء الغرف ن إلى الغرف ذات الرقم ٢ ن
س - ولكن لم أفهم ماذا يريد بعد كل هذه التحويلات؟
ج - يريد حل المشكلة التي أمامه. لقد أفرغ كل الغرف ذات الأرقام الفردية



ونحن نعلم أن مجموعة الأعداد الفردية لانهائية. وفي هذه الغرف سوف ينزل الضيوف ولا يخرج أي نزيل من الفندق. . .

فندق مريح جداً أليس كذلك؟ . . . ولكن للأسف لا يمكن بناؤه ولو أمكن لحللنا أكبر مشكلة نواجهها في وقتنا الحاضر وهي مشكلة السكن.

لنر الآن ماذا يحدث إذا بدأ النزلاء بمغادرة الفندق. هل يمكن أن يفرغ الفندق من النزلاء؟. نحن نعرف تماماً أن الإدارة لا تحب أن يفرغ الفندق من النزلاء. ولكن هذه المشكلة غير موجودة أمامنا في هذا الفندق الغريب. . . .

19 ـ النزلاء يسافرون والفندق يبقى مليئا. . . أليست خرافة هذه؟

أنا معك في أن هذا مدهش حقاً، ولكن لنر معاً ماذا تفعل إدارة الفندق في حالة سفر النزلاء.

إذا سافر نزيل الغرفة٩ تنقل الإدارة نزيل الغرفة ١٠ إلى الغرفة ٩ ونزيل الغرفة ١١ إلى الغرفة ١٠. . . وهكذا. أرى أن كل شيء مفهوم طالما أنك لم تسأل عما إذا بقيت الغرفة الأخيرة فارغة!!.

20 ـ وإذا فرضنا أنه قد غادر الفندق عدد لانهائي من النزلاء «في هذه الحالة سوف تقول إن الفندق أصبح شبه فارغ على الأقل». وفي الحقيقة أن الأمر ليس كما تصورت في هذه الحالة تقوم الإدارة بعمل معاكس لذلك العمل الذي قامت به عندما حضر إلى الفندق عدد لا نهائي من الأشخاص.

21 ـ كيف تتصرف الإدارة؟

هل رأيت ما يحدث في هذا الفندق الغريب الذي يميز عالم اللانهائيات عن عالم المنتهيات؟، إن مثل هذه الظواهر يعتبرها سكان ذلك العالم اللانهائي والذي يحوى مثل هذا الفندق عادية وطبيعية ومتفقة مع تفكيرهم السليم تماماً. ومع تجاربهم الحياتية اليومية، وفي نفس الوقت، يعتبرون عالمنا المنتهي عالما غير عادي وغريبا وغير منطقي وأكثر من ذلك. . . مضحك. . . نعم

مضحك. تصور كيف ينظرون إلى الرياضي الذي يقترح عليهم ـ مثلا ـ فندقا مؤلفا من ٥٠ غرفة والفندق فارغ بسبب سفر النزلاء... (الفندق فارغ بسبب مغادرة خمسين شخصاً للفندق... هذا شيء مضحك بالنسبة لهم وغير مفهوم كيف يفرغ الفندق بسبب سفر بعض النزلاء(١٤)؟؟).

المسلمات ـ قواعد اللعب عند الرياضيين:

أوردنا في بداية هذا الكتاب بضع كلمات للعالم الرياضي الشهير جلبرت ـ أحد عظماء رياضيي النصف الأول من القرن العشرين والذي اعتبره معاصروه بحق موسوعة رياضية ـ نورد هنا أيضا كلمات أخرى لهذا العالم. قال جلبرت(١٥): «الرياضيات ليست إلا لعبة يلعبونها وفق قواعد بسيطة مستخدمين

---

(١٤) ينتقل المؤلف بعد ذلك إلى عدد من الرموز غير مألوفة (ربما مألوفة بالنسبة للرياضيين فقط) عندنا لذلك فسوف نلخصها كمايلي: (المترجم)

∞ هي رمز اللانهائي. أما رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية التي تحوي عددا لانهائيا من العناصر فيرمز لها بـ $\aleph_0$ وتقرأ ألف صفر فيكون: س(ط) = $\aleph_0$ وعلى هذا الأساس فإذا عدنا إلى فندقنا اللانهائي استطعنا أن نعبر عن الحوادث التي جرت فيه كما يلي

عندما حضر نزيل جديد للفندق أصبح لدينا: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

عندما حضر ثلاثة نزلاء جدد أصبح لدينا: $\aleph_0 + 3 = \aleph_0$

عندما حضر عدد لا نهائي من النزلاء أصبح: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

22 ـ وعندما سافر عدد لا نهائي من النزلاء: $\aleph_0 - \aleph_0 \geqslant \aleph_0$

فكيف تفسر التساوي هنا؟

وعندما سافر نزيل واحد أصبح: $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$

والرياضي يُعرِّف المجموعة اللانهائية بالشكل التالي المختصر:

تكون المجموعة لانهائية إذا وفقط إذا كان بالامكان إيجاد تقابل ثنائي بينها وبين جزء حقيقي منها.

(١٥) دافيد جلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣) رياضي ألماني أدخل جلبرت أشياء جديدة ومهمة على مختلف أقسام الرياضيات حتى لقد عد موسوعة رياضية. قدم جلبرت أبحاثا في نظرية الأعداد، والمنطق الرياضي، والمعادلات التفاضلية والتكاملية، ووضع المسلمات الأساسية للهندسة. وقد أثرت أعماله تأثيرا كبيرا على رياضيي القرن العشرين.

في ذلك رموزا ومصطلحات ليس لها أهمية بحق ذاتها. (مثلا: الحرف ت هو أحد أحرف اللغة وليس له أهمية بحد ذاته أكثر من كونه حرفا، ولكننا إذا رمزنا بـ ت للزمن فإنه يصبح أحد رموز اللعبة الرياضية أو الفيزيائية).

يتراءى لك مثل هذا التعريف للرياضيات (على ما أعتقد) تعريفا ذكيا جدا، ولكنه غير جدي، في الوقت الذي يحوي هذا التعريف تقويما عميقا وصحيحا للرياضيات، وذلك إذا فهمنا الرياضيات كعلم مؤسس على جملة من المسلمات*. فالمسلمات ـ كما هو معروف ـ تعتبر صحيحة لاتتطلب أي برهان، وهي لاتتطلب برهانا لكونها مفهومة وواضحة، وذات بناء منطقي سليم، ولايمكن تعليلها بموضوعات أكثر بساطة ووضوحا منها. هذا ماكان معروفا ـ على الأقل ـ في الزمن البعيد. في ذلك الزمن البعيد عندما كان ياماكان في قديم الزمان ملك وله ثلاث أولاد... أما اليوم فالوضع مختلف تماما. (يبدو أن الوضع مختلف لأنه لم يعد هناك ملوك!!!!.......)

فالمسلمات في الرياضيات الحديثة أبعد ماتكون عن الوضوح والبداهة. حتى أن بعضهم يؤكد أن المسلمات ليست صحيحة دوما. أما فيما يتعلق بالبرهان فسوف نتحدث عنه فيما بعد. لنعتبر إذن المسلمات** موضوعات أو مصادرات.

● أطلق الرياضيون في الماضي كلمات مثل «بديهية» Axiom مسلمة Postulale فرضية Hypothesis على الجمل «الرياضية الأولية» التي يقررون القبول بصحتها وذلك للتمييز بها، إلا أن الرياضيين المحدثين طابقوا في الثلاثينات من هذا القرن بين هذه الكلمات، وأشاعوا استخدام كلمة Axiom بديلا منها. وتستخدم الكلمات «مسلمة» أو «موضوعة» أو «مصادرة» كترجمة لهذه الكلمة حيث استبعد استعمال كلمة بديهية. ويفضل الدكتور محمد واصل الظاهر استخدام كلمة «مصادرة» حيث استخدمها علماؤنا الأقدمون.

(المحرر)

●● نذكر القارىء بأن المسلمة أو الموضوعة أو المصادرة متطابقة بالمعنى الرياضي لكي لايلتبس عليه الأمر عند استخدام أي منها كما ذكرنا في ملاحظتنا السابقة.

(المحرر)

ومن يستخدم هذه الموضوعات لايطلب منه تقديم تقرير حول السبب الذي دعاه لاختيار هذه الموضوعة بالذات لأن هذا شأنه وحده، وهو حر في اختيار الموضوعة التي يريدها، أو جملة الموضوعات التي يريدها ويبني على أساسها نظريته. ولكن إذا تبين أنه يوجد في جملة المسلمات التي يستخدمها الرياضي شيء ما (غير عادي) - أو تناقض) - فإن الرياضيين سوف يدعون السيّاق ويصدرون قرارا بإعدام هذه الجملة.

فالمعروف أن المسلمات تعكس الخواص الأساسية لنظريات أو لجمل رياضية معينة، وإذا حدث أي شيء غير عادي في المسلمات فإن الجملة التي تدخل فيها هذه المسلمات تنهار كلها وهذه مسألة لاتحتمل المزاح. فكل جملة من المسلمات يجب أن يتحقق فيها الشرطان الأساسيان التاليان أولهما: يجب أن تكون تامة وغير متناقضة في داخلها. وثانيهما: أن تكون جملة المسلمات تامة في حالة احتوائها على كل ماهو ضروري لبناء رياضي نظري معين تنتمي إليه.

وحتى تكون هذه الجملة غير متناقضة - أي لاتحوي تناقضا في بنائها - يجب ألا تسمح بإعطاء تقرير حول شيء ما في أنه موجود وغير موجود في نفس الوقت، أو أن هناك بعض الموضوعات صحيحة وغير صحيحة في نفس الوقت، وإذا حدث ذلك - تبين أن جملة المسلمات متناقضة - فإن المؤلف (مؤلف جملة المسلمات وليس مؤلف هذاالكتاب) يتحمل مسؤولية جنائية كبيرة.

وأول من لاحظ أهمية المسلمات في العلم هو ارسطو(١٦) - على الأرجح - الذي هو أعظم عقل في العصور القديمة. لقد اعتبر ارسطو أنه في كل مجالات العلوم توجد قضايا واضحة لدرجة أنها لاتتطلب أي برهان، وهذه القضايا تؤلف جوهر وأساس هذا العلم. أما أقليدس فهو أول من أنشأ مثل هذه الجملة من المسلمات في الهندسة. واستنادا لهذه المسلمات وضع أقليدس كل النتائج والمفاهيم الهندسية المعروفة في ذلك الوقت (ومازالت معروفة حتى وقتنا الحاضر). وهذا

---

(١٦) ارسطو (٣٨٤ - ٣٢٢ قبل الميلاد) أعظم عالم وفيلسوف عند قدماء الإغريق (Aristo)

مايدعونا للتأكيد ـ وبشجاعة ـ على أن الرياضيات حتى الوقت الحاضر ـ الهندسة بصورة خاصة ـ أصبحت علما استنتاجيا. ذلك أنه استنادا إلى عدد محدد من الموضوعات الأساسية يمكن أن نتوصل إلى كل النتائج بالتدريج. ولكي نعرفك ـ عزيزي القارىء ـ على موضوعات أقليدس نعرض فيما يلي الموضوعات الخمس الأولى في الهندسة المستوية ـ نصوص هذه الموضوعات هي:

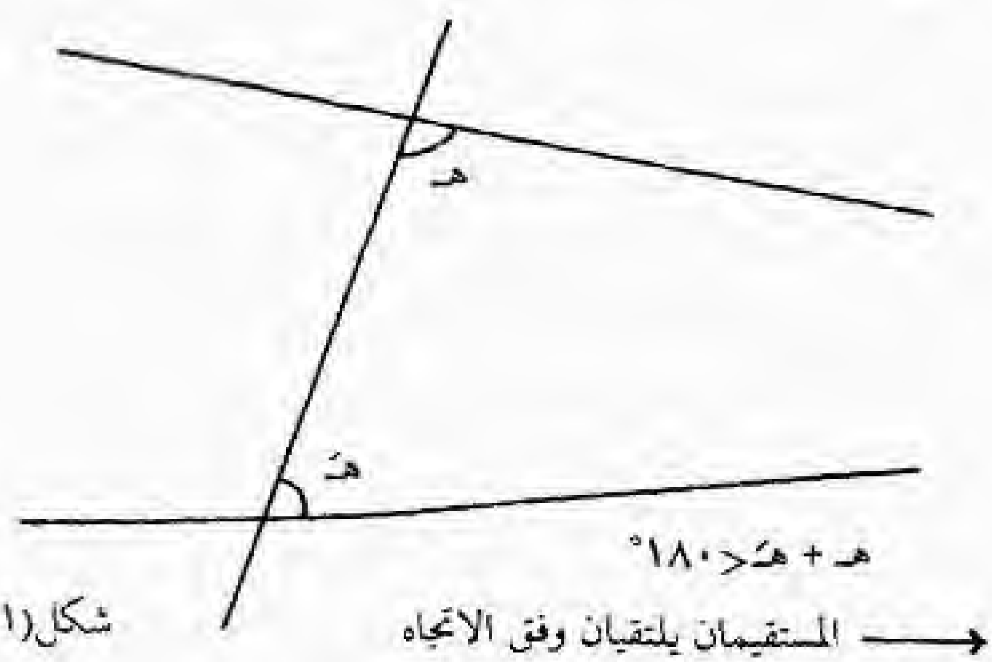
١ ـ من نقطتين (في المستوى) يمكن إنشاء مستقيم واحد يمر منهما، (أو: ان اي نقطتين في المستوى تحددان مستقيما واحدا).

٢ ـ أي مستقيم في المستوى يمكن عده إلى مالانهاية.

٣ ـ من أي نقطة في المستوى يمكن أن تمر دائرة نصف قطرها اختياري.

٤ ـ كل الزوايا القائمة متطابقة.

٥ ـ إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع قياس الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين فإن المستقيمين يتقاطعان حتما في ذلك الاتجاه الذي توجد فيه الزاويتان. ومع أن موضوعات أقليدس لم تكن دقيقة تماما كلها إلا أنها بقيت وحتى القرن التاسع عشر الجملة الوحيدة من الموضوعات للهندسة المستوية.



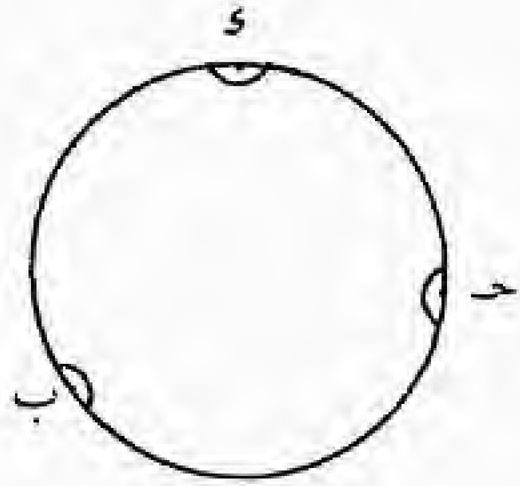
شكل(١١)

وإذا أمعنا النظر في هذه الموضوعات فإننا نلاحظ - حتى إذا لم نكن رياضيين - الفرق الكبير بين الموضوعات الأربع الأولى والموضوعة الخامسة، فالموضوعات الأربع الأولى تبدو واضحة ومفهومة ويمكن تقبلها بدون نقاش، أما الموضوعة الخامسة فهي تثير الشك في مدى صحتها ذلك لأنها طويلة ويصعب حفظها وإعادتها بسرعة إضافة إلى أنها ليست واضحة تماما.

ولكي نفهم مضمونها - فقط - لابد من أن نأخذ بيدنا قلما وورقة ومسطرة ونرسم الرسم الموافق (كما في الشكل١١). وعندما ندرس الرسم جيدا سوف نفهم هذه الموضوعة ولكن الشك في صحتها لايزول. ولسنا نحن فقط الذين شكوا في صحة هذه الموضوعة، حتى الرياضيون اعتبروا هذه الموضوعة اشكالية إلى حد ما، واعتبروا أيضا - لفترة طويلة - أن أقليدس قد حشرها حشرا في الموضوعات. ورغم ذلك لم تكن لديهم أي براهين لإزالة هذا الشك في صحتها. لقد بحث في هذه الموضوعة أفضل الرياضيين، وقاموا بمحاولات مختلفة للبرهان عليها، وحاولوا تبسيطها أو اختصارها أو استنتاجها من موضوعات أخرى أكثر وضوحا منها، أووضع صياغة أخرى لها أو. . . . . باختصار. . . . لقد قام الرياضيون بكل ما يمكن أن يفعلوه من أجل البرهنة على صحة هذه الموضوعة. وقد استمرت محاولاتهم هذه اثني عشر قرنا من الزمان، ومع ذلك لم يتمكنوا من دحضها ولم يتمكنوا من البرهنة عليها. والموضوعة مازالت كما هي إلى اليوم، وكما كانت عليه منذ ألفي عام (ما رأيكم في هذا الثبات). ولكن من الممتع أن كل هذا العمل للعلماء لم يضع سدى وماحدث هو التالي: بعد أن عمل الرياضيون أكثر من ألف عام حول هذه الموضوعة قرروا الأخذ بموقف متطرف كانوا يتهربون منه لفترة طويلة. في الواقع انه لم يكن لديهم شيء يخسرونه فيما لو جربوا ذلك. أما الموقف الذي قرروا اعتماده فهو تجاهل وجود الموضوعة الخامسة والتصرف وكأنها ليست موجودة أصلا. وقد أصابتهم الدهشة والاستغراب لما حصلوا عليه نتيجة لهذا الموقف، حتى انهم لم يصدقوا أعينهم عندما اكتشفوا أنهم باتخاذهم هذا الموقف (تجاهل وجود الموضوعة الخامسة) قد توصلوا إلى هندسة جديدة لايوجد

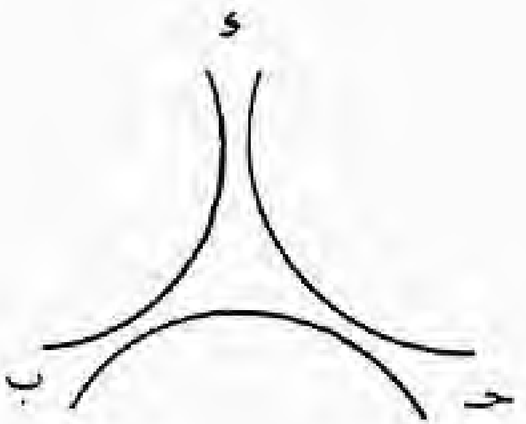
في بنائها اي تناقض، واكثر من ذلك فقد توصلوا إلى نتيجة هامةوهي أنه يوجد الكثير من هذه الهندسات المدهشة. في إحدى هذه الهندسات كانت الموضوعة التالية صحيحة: (في المستوى)

٢٣ ـ من نقطة خارج مستقيم يمكن انشاء مستقيمين موازيين لهذا المستقيم. وفي هندسة أخرى كانت لدينا الموضوعة: «من نقطة خارج مستقيم لايمكن رسم اي مستقيم مواز للمستقيم الأول» ومن ثم فإن مجموع قياس زوايا المثلث يمكن أن تكون اكبر أو أصغر من ١٨٠° (والمؤلف يذكر تماما أن أقرب أصدقائه قد نال علامة الصفر في الرياضيات عندما قال للأستاذ إن مجموع زوايا المثلث يساوي ١٥٠°!!)



بَ + حَـ + دَ > ١٨٠°

شكل ١٢



نَ + حَـ + دَ < ١٨٠°

شكل ١٣

مثل هذه الهندسات التي لاتصح فيها الموضوعة الخامسة لأقليدس أطلقوا عليها اسم الهندسة اللااقليدية.

كيف يلعب الرياضيون؟

لقد رأينا أنه حتى الرياضي العظيم جلبرت قد اعتبر الرياضيات لعبة.

س - وكيف يلعب الرياضيون بالرياضيات؟

ج - إن إحدى الألعاب المحببة إليهم هي مايلي: تؤخذ جملة مسلمات ثم تبنى على أساسها مختلف النظريات وعلاقات الترابط والنظريات المساعدة (ليما)(١٧) والتعاريف. . . . ثم ينظر ماذا يمكن استنتاجه من كل هذا البناء. وبعد أفضل اللاعبين ذلك اللاعب الذي يتمكن من بناء نظرية صعبة وتشمل أوسع مجال من مجالات المعرفة. وكلما كانت النتائج التي يتوصل إليها أكثر، والمسلمات التي يستخدمها أقل كلما كان لاعبا أفضل.

هذه اللعبة تذكرنا بلعبة الشطرنج ففي لعبة الشطرنج أيضا توجد قواعد معينة لتحرك كل حجر، وهذه القواعد يجب احترامها واتباعها بدقة وإلا فقد اللعب معناه. وقواعد اللعبة هي أيضا عبارة عن مسلمات - ومع أن كل لاعب يعرف قواعد اللعبة (المسلمات) فإنهم لا يلعبون جميعا بشكل جيد. فهناك البطل العالمي في الشطرنج، وهناك معلم اللعبة وهناك اللاعب الوسط، وهناك الهاوي والمبتدىء الذي يخسر من الخطوة الخامسة، وفي دروس الرياضيات: كما في لعبة الشطرنج. لاتكفي الموهبة وحدها للحصول على كل شيء. يجب أن يعرف الدارس النظريات بشكل جيد، وأن يدرس العاب العظماء من «المعلمين».

اعتقد انه قد أصبح تعريف جلبرت للرياضيات أكثر وضوحا. ففي الرياضيات كما في لعبة الشطرنج، لايمكن لأي شخص أن يصبح «بطلا عالميا» أو

---

١٧ - LEMMA هي نظرية مساعدة تؤلف مرحلة من مراحل برهان نظرية معقدة: حيث تدخل مفهوما جديدا بواسطة تعريف يستند إلى مفاهيم معروفة سابقا. المترجم

يشير الأستاذ الدكتور محمد واصل الظاهر إلى أن علماءنا الأقدمين أسموها «مأخوذة».

(المحرر)

محترفا، ولكنه إذا بذل جهدا معينا في دراسة النظريات فقد يشعر بمتعة اللعب على الأقل.

س ـ في الحقيقة إن كل ما تحدثت به عن المسلمات ممتع جدا ومفيد ولكن، على ما أعتقد، دراسة الأعداد الطبيعية لاتتطلب أي مسلمات.

ج ـ أنا آسف، ولكن هذه الفكرة غير صحيحة منذ أكثر من ثمانين عاما.

س ـ هل صحيح إذن أنه لدراسة الأعداد الطبيعية يلزمنا مسلمات؟

ج ـ نعم. يلزمنا مسلمات لدراسة الأعداد الطبيعية. وهذه المسلمات وضعها العالم الرياضي الايطالي بيانو (١٨) في عام ١٨٩١ م وقد سميت باسمه: موضوعات بيانو. ولكن لاتخش شيئا فهذه الموضوعات بسيطة ومفهومة بدرجة كافية. وإليك هذه الموضوعات:

١) الواحد ـ عدد طبيعي.

٢) لكل عدد طبيعي ن عدد تال له يسمى نَ بحيث:

نَ = ن + ١

٣) الواحد ليس مجاورا لأي عدد.

٤) إذا كان نَ = مَ فإن ن = م

٥) كل مجموعة تحوي العدد ١ وتحوي إضافة لكل عدد فيها ن تالٍ لذلك العدد هو نَ = ن + ١ تحوي كل الأعداد الطبيعية. هذه هي موضوعات بيانو وأنت ترى أنها ليست «مخيفة»، ويمكن فهمها ـ تقريبا ـ مباشرة وبسهولة ومع ذلك لنحاول اعطاء بعض التفصيلات.

الموضوعة الأولى لاتحتاج إلى أي تفسير فهي تعبر عن الحقيقة القائلة إن العدد ١ عدد طبيعي (أعلم أنك سوف تقول: إن هذا الامر معروف لنا

---

١٨ ـ ح. بيانو (Peano) (١٨٥٨ ـ ١٩٣٢) رياضي وعالم منطق إيطالي.

بدون موضوعة .)

الموضوعة الثانية تؤكد على أنه بعد كل عدد طبيعي يوجد عدد طبيعي تال واحد يسمى العدد التالي ويرمز لها بالفتحة مثلا: ١َ = ٢ وتقرأ (التالي للعدد ١ هو العدد ٢) وكذلك: ٢َ = ٣، ٨َ = ٩ وبصورة عامة فإن: نَ = ن + ١ (التالي للعدد ن هو ن + ١).

الموضوعة الثالثة تعني أن الواحد أصغر الأعداد الطبيعية أو: الواحد ليس له سابق في مجموعة الأعداد الطبيعية أو: الواحد ليس تاليا لأي عدد طبيعي.

الموضوعة الرابعة تقول إنه إذا كان لدينا تاليان متساويان فالعددان متساويان. فإذا كان نَ تاليا لـ ن، مَ تاليا لـ م وكان نَ = مَ فإن م = ن. ومن الطبيعي أنه لايمكن أن يكون لعدد طبيعي سابقان مختلفان.

الموضوعة الخامسة مهمة جدا (الخامسة مرة أخرى) وتسمى مبدأ الاستقراء الرياضي. وهذه الموضوعة تنص على مايلي:

إذا كانت مجموعة من الأعداد سـ تحوي العدد ١ ثم إذا وجد فيها عدد ن

فإنها تضم أيضا العدد التالي له ن + ١ اي: [ن ∋ سـ ⇐ (ن + ١) ∋ سـ]. فإن هذه المجموعة تضم كل الأعداد الطبيعية إذن كل مجموعة سـ تحقق مايلي: [١ ∋ سـ ثم إذا كان ن ∋ سـ ⇐ (ن + ١) ∋ سـ] فإن سـ تحوي مجموعة الأعداد الطبيعية. وهكذا فقد تعرفنا على مجموعة من موضوعات الرياضيات المعاصرة.

س - جميل جدا.

ج - وأخيرا أعجبك شيء ما في الرياضيات. هذا يعني أنني قد استطعت أن أعلمك شيئا ما.

س - ولكن لدي سؤال.

ج - اسأل ولاتخجل ومن واجبي أن أجيب على أي سؤال لديك.

س - لم أفهم جيدا دور هذه الموضوعات (موضوعات بيانو) إذا كنا قد استطعنا دراسة الأعداد الطبيعية بدونها.

ج - (هذا مالم أحسب حسابا له، ما أن شعرت بالفخر لإنني استطعت أن أحببه بمادة الرياضيات حتى يفاجئني بهذا السؤال، لنر هل يمكن أن أجد مخرجا من هذا المأزق؟).

نعم... في الحقيقة... لاادري كيف افسر لك (يجب أن أكسب بعض الوقت إلى أن أتمكن من ايجاد الجواب).

ان المبرر لوجود الموضوعات موجود بدون شك دون النظر فيماإذا كانت صفات الأعداد الطبيعية معروفة أم لا... ولكن إذا توصلنا إلى أن مجموعة ما من الأعداد تحقق موضوعات بيانو، تستطيع أن نؤكد أن هذه المجموعة تملك أيضا صفات مجموعة الأعداد الطبيعية. (أنا متأكد أنه سوف يصدق كل كلمة أقولها ولن يطلب مني البرهان) وهذا يعطي برهانا كافيا على ضرورة هذه الموضوعات. وهكذا فإن قواعد اللعب (الموضوعات) موجودة، أما كيفية استخدامها فهذا مرتبط بمقدرتنا ومهارتنا في استعمالها.

العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية:

أعرف جيدا أنك لاتحب العمليات الحسابية، ومع ذلك فلا تقلق فنحن لن نقوم هنا باجراء العمليات الحسابية وإنما سوف نتحدث بعض الشيء حول العمليات الحسابية فقط. وبالمناسبة فإن كل الرياضيين لايحبون الحساب: وفي أقصى الحالات التي تتطلب اجراء عمليات حسابية يكتفون بوضع برنامج معين، ويعطون توجيهات مناسبة إلى مايجب حسابه. أما انجاز العمليات الحسابية فهي تتم بواسطة الآلات، وأنا واثق من أن أي نادل في مطعم يتقن العمليات الحسابية

أكثر من أي رياضي ، ويجب مع ذلك عدم الإقلال من أهمية العمليات الحسابية لأنها ضرورية لنا في جميع جوانب الحياة، ويجب علينا أن نعرفها بشكل جيد. هنا أود أن ألفت انتباهك إلى فكرة شائعة وخاطئة ، تلك الفكرة التي تقول: إن الطفل الذي يستطيع القيام بعمليات حسابية بسرعة سوف يكون بالتأكيد رياضيا جيدا. وخطأ هذه الفكرة عائد بالدرجة الأولى لكون هذين الشيئين كل منهما منفصل عن الآخر. إذ ليس من الضروري أن يصبح الطفل الذي يتقن العمليات الحسابية رياضيا جيدا في المستقبل والعكس أيضا صحيح .

لنتعرف الآن على العمليات الحسابية على الأعداد الطبيعية. واعتقد أنها معروفة بالنسبة لك فهذه العمليات هي : الجمع والضرب والطرح والقسمة .

س ـ ولماذا ذكرتها لي بهذا التسلسل؟ أليس هذا مجرد صدفة؟

ج ـ لا. لقد تعمدت ذكرها بهذا التسلسل وليس ذكرها مجرد صدفة. ذلك أن عمليتي الجمع والضرب عمليات مباشرة أما عمليتا الطرح والتقسيم فعمليات معاكسة .

س ـ حسن، وما هو جوهر الخلاف بين العمليات المباشرة والمعاكسة؟

ج ـ إليك جوهر الخلاف بينهما.

إذا أخذنا أي عددين طبيعيين فإن حاصل جمعهما أو ضربهما يعطي حتما عددا طبيعيا . إذن هاتان العمليتان لا تخرجاننا من مجموعة الأعداد الطبيعية، حاول بنفسك أن تجمع مثلا أو تضرب أي عددين طبيعيين وسوف تحصل دوما على عدد ثالث طبيعي وإليك بعض الأمثلة:

٩ + ١٥ = ٢٤   ٣ + ٢٤ = ٢٧

٩ × ١٥ = ١٣٥   ٥ × ٦ = ٣٠

أما عمليتا الطرح والقسمة فلا تعطيان دوما بالنتيجة عددا طبيعيا مثلا :

٩ - ٦ = ٣	٣ عدد طبيعي
٦ - ٩ = -٣	-٣ ليس عددا طبيعيا
٢٠ ÷ ٤ = ٥	٥ عدد طبيعي ولكن
٤ ÷ ٥ = $\frac{٤}{٥}$	ليس عددا طبيعيا

ولهذا فنحن نقول إن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب(*) بينما هي مجموعة غير مغلقة بالنسبة لعمليتي الطرح والقسمة.

إذا فكرت الآن بعض الشيء تستطيع الإجابة بسهولة على الأسئلة التالية:

٢٤ . ١ - متى يكون حاصل طرح عددين طبيعيين عددا طبيعيا؟

٢٥ . ٢ - متى يكون حاصل قسمة عددين طبيعيين عددا طبيعيا؟

لنر كيف نعرف مجموع عددين طبيعيين؟

تعريف الجمع يتم بالشكل التالي: إذا كان ب، جـ عددين طبيعيين فإنه يوجد عدد طبيعي واحد وواحد فقط ـ كما يحب الرياضيون أن يقولوا ـ نسميه مجموع هذين العددين ونرمز له بـ ب + جـ

س - لم تذكر أي شيء غير عادي.

ج - حسن لاتتسرع في الحكم وحاول بنفسك أن تصوغ تعريف عملية ضرب عددين طبيعيين استنادا إلى تعريف مجموع عددين طبيعيين.

وقد توصل الرياضيون خلال سنوات طويلة من البحث إلى قواعد محددة تحققها عمليتا الجمع والضرب، وقد سميت هذه القواعد بالقوانين، ولايحق

(*) ونقول أيضا إن الجمع والضرب هما قانونا تشكيل داخلي في ط
ويقال أيضا بأن كلا من الجمع والطرح عملية أثنائية على ط، كما يقال بأن ط مغلقة تحت العمليتين +، ×.

المحرر

لأحد أن يتجاوزها وإلا فالويل له . . . .

ألا تصدق كلماتي؟ حاول أنت أن تتجاوزها . وإليك هذه القوانين.

١ ـ الخاصة التبديلية للجمع أي :

$\forall$ب، جـ $\in$ ط فإن ب + جـ = جـ + ب

هذا القانون يقول لنا: إذا غيرنا أماكن حدى الجمع فإن حاصل الجمع لايتغير (مثلا: ٤ + ٦ = ٦ + ٤).

ويوجد قانون مشابه له بالنسبة لعملية الضرب أي :

$\forall$ ب، جـ $\in$ ط فإن ب . جـ = جـ . ب

(وهذا صحيح لان ٤ × ٧ = ٧ × ٤)

وهل هذا القانون صحيح من أجل عملية الطرح؟ لا .

٢ ـ الخاصة التجميعية للجمع والضرب أي : مهما تكن الأعداد الطبيعية ب، جـ، د $\in$ ط فإن :

ب + (جـ + د) = (ب + جـ) + د

ب . (جـ . د) = (ب . جـ) . د

وهذا القانون يعني أن حاصل جمع أو ضرب ثلاثة أعداد طبيعية لايتغير بتغير ترتيب هذه العملية على الأعداد الثلاثة . لنر المثالين التاليين :

١) (٥ + ٨) + ٣ = ٥ + (٨ +٣)

١٣ + ٣ = ٥ + ١١

١٦ = ١٦

٢) (٣ × ٥) × ٦ = ٣ × (٥ × ٦)

١٥ × ٦ = ٣ × ٣٠

٩٠ = ٩٠

أما إذا تمكنت من ايجاد ثلاثة أعداد طبيعية لاتتحقق من أجلها هذه القوانين فإن الرياضيين سوف يتركون مباشرة العمل في الرياضيات إلى

اعمال أخرى. . . .

لننتقل الآن إلى القانونين التاليين لعملية الجمع :

٣ ـ إذا كانت ب، جـ عددين طبيعيين وكانت ب . جـ = جـ . ب عندئذ تكون ب + جـ ≠ ب

وهذا القانون* يؤكد على أن الصفر ليس عددا طبيعيا لأن هذه العلاقة غير صحيحة من أجل الصفر أي: ب + ٠ = ب، أما إذا كان ب، جـ لايساويان الصفر (لأن كلا منهما عدد طبيعي) عندئذ يكون: ٢ +٣ ≠ ٢، ٥ + ١ ≠ ٥ .....

٤ ـ إذا كانت ب، جـ، د أعدادا طبيعية وكانت ب + جـ = ب + د فان جـ = د.

وهذا القانون يقول: إذا كان مجموع عددين يساوي مجموع عددين آخرين وكان حدان في الطرفين متساويين عندئذ يكون الحدان الآخران متساويين فمن العلاقة: س + ٦ = ع + ٦ نستنتج أن: س = ع

والآن قانونان لعملية الضرب :

٥ ـ من أجل أي عدد طبيعي ب يكون: ب × ١ = ب وهذا القانون يقول: حاصل ضرب اي عدد طبيعي بالعدد ١ هو العدد نفسه. مثلا:

٣ × ١ = ٣   ٧ × ١ = ٧   ٩ × ١ = ٩   ١ × ١ = ١.....

وأخيرا خاصة توزيع الضرب بالنسبة للجمع

٦ ـ من اجل أي ثلاثة أعداد طبيعية ب، جـ، د ∋ ط يكون:

ب (جـ + د) = ب . جـ + ب . د

مثال: ٣ (٥ + ٧) = ٣ × ٥ + ٣ × ٧

٣ × ١٢ = ١٥ + ٢١

٣٦ = ٣٦

● لاحظ أن هذا القانون ينسجم مع ما أخذ به المؤلف أصلا باستبعاده الصفر من مجموعة الأعداد الطبيعية، والأمر محض اتفاق لابد من أن يحظى بالانسجام.

المحرر

٢٦ ـ واضح أن هذا القانون يحدد كيفية ضرب الأقواس بشكل صحيح .

هذه هي قوانين جمع وضرب الأعداد الطبيعية .

لنر الآن كيف نستخدم ، عادة ، خاصتي الجمع التبديلية والتجميعية .

إذا أردنا جمع عدة أعداد بشكل عمودي فإننا عادة ـ ولسهولة إجراء هذه العملية ـ نقوم بالجمع من الأسفل إلى الأعلى ثم من الأعلى إلى الأسفل واستنادا إلى خاصتي الجمع التبديلية والتجميعية فإن حاصل الجمع يكون

١٤
٦
١٣
―――
٣٣

نفسه في الحالتين . وإذا كان من الضروري حساب مجموع عدد كبير من الحدود فإننا نقوم بتجميعها في زمر، ونقوم بجمع حدود كل زمرة، ثم نجمع النتائج مطبقين أثناء ذلك خواص الجمع التجميعية والتبديلية مثلا :

١٣ + ٢٩ + ٧ + ١١ = (١٣ + ٧) + (٢٩ + ١١) = ٢٠ + ٤٠ = ٦٠

وفي حالة الضرب نستخدم أولا الخاصة التوزيعية ثم الخاصة التجميعية لنر ذلك في المثال التالي :

٧ × ٢٦ = ٧ × (٢٠ + ٦) = ٧ × ٢٠ + ٧ × ٦ = ١٤٠ + ٤٢ = ١٤٠ +
(٤٠ + ٢) = (١٤٠ + ٤٠) + ٢ = ١٨٠ + ٢ = ١٨٢

ونحن نقوم ـ عادة بمثل هذه العمليات ذهنيا . إذن فالقوانين التي عرضناها معروفة لدينا سابقا بشكل جيد . ونحن نستخدمها أثناء اجراء الحسابات دون أن نعلم أننا نستخدم هنا قوانين (وأنا أعتقد أن هذا أفضل بكثير، لأننا إذا عرفنا أنها قوانين حاولنا باستمرار مخالفتها، ذلك أنه ـ حسب المثال الشائع ـ «الثمر المحرم دوما لذيذ»

كل ما ذكرناه حتى الآن بسيط إلى أبعد الحدود، وواضح وكأنه ليس من

الرياضيات. ولكن علينا ألا نفرح قبل الأوان. وأكثر من ذلك علينا الا نتباهى أمام الرياضيين لأننا قد استوعبنا قانوني الجمع والضرب. لأنه إذا أخبرت أحد الرياضيين عن معارفك هذه بالرياضيات فإنه سوف يسمعك بهدوء وبشاشة ثم يقول لك الملاحظة التالية: «في الواقع هذا شيء ممتع جدا، ولقد نسيت أنا كل هذا، صحيح لقد عرفوا هذه العمليات بهذا الشكل في ذلك الوقت الذي توجت فيه الامبراطورة ماريا تيريزا والامبراطورة فرانتسا يوسيف، ومن المحتمل أن يكون التعريف قد تم بعد ذلك بوقت قليل أو ما قبل الحرب العالمية الأولى إذا لم أكن مخطئا».

وهذا ما تستحقه لأنه لم يطلب منك أحد أن تتحدث عن الرياضيات مع الرياضيين - هذا كما لو كنت تحدث السيبيري عن الثلج - وقد تتابع أنت حديثك مع الرياضي دون أن تعلم ما ينتظرك منه:

س - حسن. إذن كيف يعرف الرياضي مفهوم الجمع الآن؟

ج - سوف يجيبك ناظرا إليك من أعلى نظارته: هذا الموضوع أبسط إلى حد ما.

تعريف الجمع هو على الشكل التالي: إن الجمع تابع (تطبيق) معرف من ط × ط ويأخذ قيمته في ط أي أن:

ط × ط ← ط يعطي هذا التابع بالعبارة:

(ب، جـ) ←+ ب + جـ حيث ب، جـ ∈ ط

س - ماذا؟.... ماذا قلت؟... الجمع هو......؟

ج - سوف يكرر الرياضي ظانا أنك لم تسمعه جيدا:

الجمع هو تابع ط × ط ←+ ط

أما أنت فسوف تحاول الخروج من المأزق والتأكد بنفسك مما سمعت فتسأل: وكيف يمكن أن تفسر هذا؟ وسوف يجيبك الرياضي محاولا انهاء المحادثة: لاأفهم ماذا يمكن أن أفسر لك هنا إذا كان كل شيء واضحا في

التعريف!! وسوف ينتهي حديثك مع الرياضي عند هذا الحد. مع أنك للأسف قد نسيت أن تسأله ما (حاصل الضرب) ولو سألته لسمعت منه الجواب التالي:

(حاصل ضرب) العددين ب، جـ الطبيعيين هو تابع ط × ط ⟵× ط معطى بالعلاقة التالية: {(ب، جـ) ⟵ ب × جـ: ب، جـ ∈ ط}

أعلم أنك سوف تعود إلى الآن لأفسر وأوضح لك كلمات وتعاريف ومصطلحات الرياضي(١٩). ولحسن الحظ فأنا أعرف هذه التعاريف والمصلحات.

(لقد وضح لي هذه التعاريف طالب في فرع الرياضيات، عربون شكره لي لأنني أهديته بطاقة لمشاهدة مباراة بكرة القدم، صحيح أن هذا الطالب قد ترك قسم الرياضيات بعد أن درس في السنة الأولى ثلاث سنوات متتالية دون أن يترفع، والتحق بكلية طب الأسنان، ولكن لاأهمية لهذا أبدا: من الممكن أن يكون هذا هو السبب الرئيس في أنه استطاع ان يفسر لي كل شيء عن هذه التعاريف!!) هذا ماقاله طالب الرياضيات: إن ط × ط أوس × ع أو. . . هي (الحاصل) الديكارتي العادي للمجموعات وهو يتألف من جميع الأزواج المرتبة التي يكون مسقطها الأول من المجموعة الأولى ومسقطها الثاني من المجموعة الثانية مثلا:

إذا كانت س = {ب، جـ، د} وع = {١، ٢} فإن:

س × ع = {(ب،١)، (ب،٢)، (جـ، ١)، (جـ، ٢)، (د، ١)، (د، ٢)}

وهي مجموعة مؤلفة من ستة عناصر وكل عنصر منها زوج مرتب.

وكذلك يمكن أن نجد جداء المجموعة ع بنفسها أي ع × ع بالشكل:

---

(١٩) يقصد بالرياضي في كل هذا عالم الرياضيات وليس مجرد مدرس للرياضيات (ضمن القوسين (   ) نضع ما يتحدث به المعلم مع نفسه).

ع × ع = (ه١، ه١، ه٢، ه٢، ه١، ه٢، ه٢)

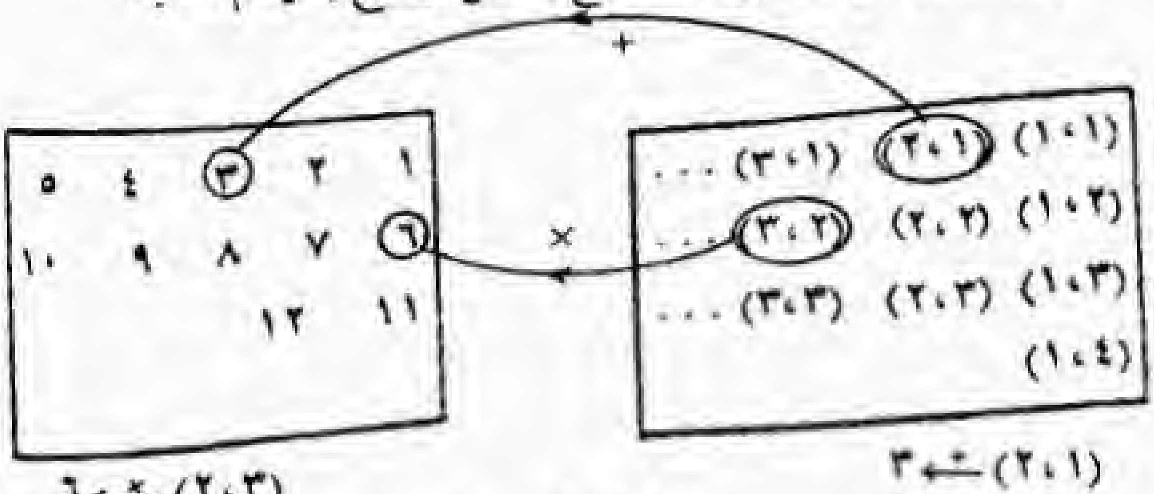
أما الجداء ط × ط فهو مجموعة كل الأزواج المرتبة الممكنة للأعداد الطبيعية ط = (١، ٢، ٣، ٤، ....)

وعدد عناصر ط × ط كبير جدا بالطبع أولا نهائي، تماما كما هي المجموعة ط لانهائية لذا يمكن أن نمثله بالجدول التالي اللانهائي من الأزواج المرتبة:

$$\left\{\begin{array}{l}
(١، ١)\ (١، ٢)\ (١، ٣)\ (١، ٤)... \\
(٢، ١)\ (٢، ٢)\ (٢، ٣)\ (٢، ٤)... \\
(٣، ١)\ (٣، ٢)\ (٣، ٣)\ (٣، ٤)... \\
(٤، ١)\ (٤، ٢)\ (٤، ٣)\ (٤، ٤)...
\end{array}\right\}$$

وكل عددين يؤلفان أحد هذه الازواج، فالعددان ٤، ٢ يؤلفان الزوج (٤، ٢) الموجود في الجدول في السطر الرابع والعمود الثاني. بينما الزوج (٤٣، ١٥٦) موجود في الجدول نفسه السطر ٤٣ والعمود ١٥٦ وهكذا. . . . .

وعندمانقول ان الجمع تابع: ط × ط $\xrightarrow{+}$ ط معطى بالعلاقة: (ب، جـ) $\xrightarrow{+}$ (ب + جـ): ب، جـ ∈ ط فهذا يعني أننا نضع كل زوج مرتب (ب، جـ) من المجموعة ط × ط في توافق مع عدد وحيد من المجموعة ط هو العدد ب + جـ ويمكن أن نمثل هذا التابع بشكل أوضح بالرسم التالي:



ط × ط ⟵ ط

فالزوج (١ ، ٢) من المجموعة الأولى ط × ط يقابله وفق تابع الجمع العدد ٣ من المجموعة الثانية ط . وفي عملية الضرب يوافق كل زوج من الأعداد من المجموعة الأولى عددا واحدا فقط (عنصرا واحدا) من المجموعة الثانية . فالعنصر (٣ ، ٢) من ط × ط (كما في الرسم) يوافقه العنصر ٦ من ط

اي : (٣ ، ٢) $\xrightarrow{\times}$ ٦

بهذا الشكل فسر لي طالب الرياضيات الذي لم يصبح عالم رياضيات عمليتي الجمع والضرب على ط .

محادثــة حــول الصفــر :

س ـ وماذا يمكن أن نقول حول الصفر؟ فالصفر يكافىء لاشيء ، والصفر عموما ليس عددا إنما هوصفر (عادي) . وماذا يمكن أن نقول هنا أكثر من ذلك؟

ج ـ هذا ليس كل شيء . ولذا فأنا أرجوك أن تتحلى بالصبر وأن تؤجل أقوالك وأحكامك هذه إلى نهاية محادثتنا . الصفر ليس كما تظن لأول وهلة أنه لايملك أي أهمية . فللعدد صفر خواص كثيرة مختلفة عن خواص بقية الأعداد الطبيعية وهي ممتعة بنفس الوقت . وأريد أن أحدثك هنا عن هذه الخواص بالذات .

لنر أولا كيف تشكل هذا العدد . لنحاول أن نطرح ـ عفوا ـ نجمع عددين متعاكسين نظيرين مثلا :

٣ + (ـ ٣) = ٠ ، ٧ + (ـ ٧) = ٠ ، ١٠٧ + (ـ ١٠٧) = ٠

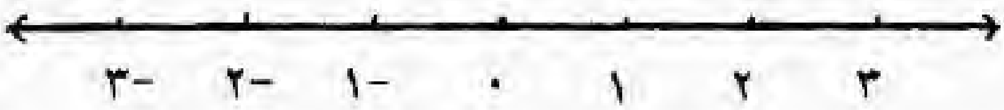
وبصورة عامة : ب + (ـ ب) = ٠

اذن ناتج جمع عددين متعاكسين هو الصفر دوما .

لقد توصلنا ـ كما ترى ـ إلى العدد صفر اثناء عملية الطرح . ولكن هل كانت هذه العملية سريعة وبسيطة دائما كما هي الآن؟

بالتأكيد لا . كان من الضروري القيام بأعمال كثيرة ولوقت طويل إلى أن اقتنع الرياضيون تماما أن الصفر (على قدم المساواة) مع بقية الأعداد الطبيعية المعروفة . والهنود هم أول من اعترفوا بالصفر كعدد فعلي قبل ألف عام ولكن رياضيي أوروبا ترددوا طويلا في قبول هذا الاعتراف . ففي القرن السابع عشر أكد أحد الرياضيين الإنكليز المحترمين(٢٠) أن الصفر ليس عددا . والخلاف حول الصفر (كما حدث حول الأعداد السالبة) قد زال تماما في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر فقط . وهذه الحقيقة تعني أن الصفر «أصغر عمرا» من بقية الأعداد الطبيعية .

س - إلى أي مجموعة من الأعداد ينتمي الصفر: إلى مجموعة الأعداد الموجبة أم السالبة؟



ج - لاينتمي الصفر إلى أي من المجموعتين . بل هو يقع على الحدود بينهما ويشغل هناك مكانا مرموقا . فالصفر اذن هو شخصية أو عنصر متميز، وبعبارة أخرى فالصفر هو صفر . !

س - هل يمكن ربط الصفر بالمجموعات؟

ج - بالتأكيد . الصفر مرتبط بالمجموعات بشكل مباشر لأنه ينشأ من المجموعة الخالية . كنا قد أعطينا تعريف الصفر - إذا كنت تذكر - بأنه رئيس المجموعة الخالية وكتبنا: $ر(\Phi) = ٠$

إذن الصفر هو عدد عناصر المجموعة الخالية . ويجب أن ننتبه كثيرا كي لانخطىء ونكتب بدل هذا التعريف مايلي: ر({ ٠ }) فهذه الكتابة الأخيرة

---

(٢٠) هو الرياضي جون واليس (١٦١٦ - ١٧٠٣) استاذ في الهندسة من جامعة أكسفورد . وهو أحد الشخصيات الرياضية المرموقة في عصره . (Wallis J.)

تعني: رئيسي المجموعة المؤلفة من العنصر الوحيد الصفر ولذلك فإن

ں({ ٠ }) = ١

لنستعرض الآن خواص هذا العدد الصفر. إذا جمعنا الصفر إلى أي عدد طبيعي فالناتج هو العدد الطبيعي نفسه مثلا:

٢ + ٠ = ٢   ٤ + ٠ = ٤   ١٦ + ٠ = ١٦. . . .

وبصورة عامة: ب + ٠ = ب وذلك مهما يكن العدد الطبيعي ب. ولهذا فإن الرياضيين يقولون إن الصفر عنصر محايد بالنسبة للجمع. أعلم أن هذه الخاصة للصفر معروفة لديك. وأذكرك هنا أن العدد واحد يملك نفس الخاصة - عنصر محايد - بالنسبة لعملية الضرب. اما خاصة الصفر المتعلقة بعملية الضرب فهي اكثر أهمية.

لنحاول أن نضرب أي عدد مهما يكن كبيرا بالصفر نجد أن:

٩ × ٠ = ٠   ٧٥ × ٠ = ٠   ١١٩٥ × ٠ = ٠

٣١٢٤٣٥٦٩٨٧٩٢١٣٥٦٧٨٩ × ٠ = ٠

ما قولك الآن؟ أليس للصفر قوة متميزة بين الأعداد؟.

وهكذا: إذا ضربنا أي عدد بالصفر فالناتج دوما يساوي الصفر أي:

ب × ٠ = ٠ مهما يكن العدد ب (*).

حاول أن استطعت أن تجد عددا آخر له نفس الخاصة كما للصفر.

هذا ليس كل شيء، ولكن من الأفضل ألا نتحدث عن القسمة على الصفر.

س - ولماذا؟

ج - لأن أي محاولة للتقسيم على الصفر ينظر إليها الرياضي بأنها «مخالفة» أشد من عملية عبور الشارع والإشارة حمراء، أو السير في عكس اتجاه السير المسموح

(*) نقول ان الصفر هو «عنصر ماحي» بالنسبة للضرب.

به. فالرياضيون يؤكدون أن القسمة على الصفر ممنوعة منعا باتا (حسب قوانينهم)، ولايقولون أكثر من ذلك في هذا الموضوع!! وعندما يدور الحديث حول القوانين الرياضية فالرياضيون لايقبلون فيها أي توسل أو طلب للرحمة. صدقني أن القوانين الرياضية لايمكن مقارنتها في اي شيء مع قوانين المحاكم والقضاء العام (إلا بالاسم فقط). فالمحامي يحاول دائما ايجاد مخرج من قوانين المحاكم (قوانين الحقوقيين). أما القوانين الرياضية فهي صارمة جدا ولاتتغير باستمرار بالمقارنة مع قوانين أخرى، وهي باقية في قوتها وتأثيرها. مئات بل آلاف السنين وتطبيقاتها واحدة في جميع أنحاء العالم وهذا يعني أنه إذا أردنا أن ندرس الرياضيات يجب علينا أن نحترم هذه القوانين دون النظر إلى المكان الذي نعيش فيه: سورية أو اليابان أو أميركا أو الهند.... وهكذا لنحفظ القاعدة التالية:

تقسيم أي عدد على الصفر ممنوع منعا باتا».

س - وهل يمكن تقسيم الصفر على أي عدد آخر؟

ج - يمكن. هذه العملية مسموح بها. إذا قسمنا الصفر على أي عدد فالناتج دائما هوالعدد صفر أي أن:

$٠ ÷ ٤ = ٠$ $\qquad$ $٠ ÷ ٧ = ٠$ $\qquad$ $٠ ÷ ١٩٤٧ = ٠$

وبصورة عامة: من أجل أي عدد طبيعي ب يكون: $٠ ÷ ب = ٠$

وهكذا فقد توصلنا إلى أن الصفر ليس فراغا بل عددا ممتعا جدا ويشغل مكانه خاصة بين الأعداد. إضافة لذلك، فالصفر هو العدد الوحيد الذي اضطر الرياضيون إلى وضع قاعدة خاصة من أجله (لعملية تقسيم الصفر على أي عدد)، وهذا ليس بالأمر القليل خصوصا وأن الرياضيين لايحبون الحالات الشاذة. لذا يجب الا تتحدث عن الصفر في المستقبل باستخفاف.

هذا ما أردت أن أقوله لك عن الصفر.

بضع كلمات حول بقية الأعداد:

بعد أن تعرفنا على الصفات الأساسية للأعداد الطبيعية وبعض خواصها نجد من الضرورة أن نذكر بضع كلمات عن بقية أعضاء أسرة الأعداد (لكي لاتغضب بقية أعضاء الأسرة على الأقل).

من الملاحظ أنه مهما تكن الأهمية الكبيرة التي تتميز بها الأعداد الطبيعية، ومهما تكن قديمة فهي غير كافية وحدها من أجل تحقيق أبسط العمليات الحسابية التي تجرى كل يوم في حياتنا. لتكن لدينا المسألة: «يملك رجل ٧ ليرات وعليه دين ١١ ليرة ما الدين المتبقي عليه بعد ان يعطي كل النقود التي يملكها»؟

نعلم أنه سوف يبقى على هذا الرجل دين مقداره ٤ ليرات لأن: (٧ ـ ١١ = ـ ٤). واضح أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير كافية لحل مثل هذه المسائل البسيطة (ذلك أن ـ ٤ لاينتمي إلى ط)، ولذلك فنحن مضطرون إلى توسيع مجموعة الأعداد حتى نتمكن من حل مثل هذه المسائل على الأقل.

وقد تعرفنا على مثل هذا التوسع فيما سبق عندما أضفنا الصفر إلى مجموعة الأعداد الطبيعية(٢١).

والتوسع الآخر لمجموعة الأعداد نحصل عليه بالشكل التالي: نطرح الأعداد الطبيعية الكبيرة من الأعداد الطبيعية الصغيرة فنحصل على أعداد سالبة. مثلا:

٣ ـ ٧ = ـ ٤   ٣ ـ ٦ = ـ ٣   . . .

إن مجموعة الأعداد الطبيعية مع مجموعة الأعداد السالبة والصفر التي حصلنا عليها تؤلف مجموعة جديدة أوسع من مجموعة الأعداد الطبيعية وتحويها هذه المجموعة الجديدة نسميها مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بـ ص

ص = {. . . ـ ٣، ـ ٢، ـ ١، ٠، ١، ٢، ٣، . . .}

---

(٢١) لنلاحظ أننا نرمز في هذا الكتاب بـ ط لمجموعة الأعداد الطبيعية ماعدا الصفر أي أن: ط = {١، ٢، ٣، ٤، . . .} /المترجم/

ويمكن تمثيلها على مستقيم الأعداد بالشكل التالي:

$$\longleftarrow\; -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \;\longrightarrow$$

والتوسع الثالث لمجموعة الأعداد يعطينا الأعداد العادية النسبية والحاجة لهذا التوسع الجديد لمجموعة الأعداد نتج من كون عملية القسمة غير ممكنة في ص دائما. فإذا كان ب، جـ عددين صحيحين و جـ $\neq$ ٠ فإن حاصل القسمة $\frac{ب}{جـ}$ يكون عددا صحيحا إذا كان ب من مضاعفات جـ فقط. اي

$$\frac{٤}{٢} = ٢ \quad ، \quad \frac{-٨}{٢} = -٤ \quad ، \quad \frac{-١٨}{٣} = -٦ \; ، \ldots$$

أما إذا لم يكن ب من مضاعفات جـ فناتج القسمة ليس عددا صحيحا.

مثال: $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، .....

وهذه مجموعة جديدة من الأعداد الكسرية أو النسبية.

ولكن نلاحظ أن كل عدد صحيح يمكن أن نكتبه أيضا بشكل عدد كسرى نسبي ذلك أن:

$$١ = \frac{١}{١} \quad ٢ = \frac{٢}{١} \quad -٣ = \frac{-٣}{١} \ldots$$

فاذا أخذنا اجتماع مجموعة الأعداد الكسرية غير الصحيحة ومجموعة الأعداد الصحيحة لنتج لدينا مجموعة جديدة من الأعداد. هذه المجموعة الجديدة نسميها مجموعة الأعداد العادية النسبية ونرمز لها بالرمز ع ونكتب باختصار بالشكل:

ع = { $\frac{ب}{جـ}$ / جـ $\neq$ ٠ ، ب، جـ $\in$ ص }. نلاحظ أن ع تحوي ص (حسب طريقة تشكيلها) وهي أوسع من ص.

ومن الممتع أن مجموعة الأعداد العادية يمكن كتابتها بالشكل التالي:

نكتب جميع الكسور المتتالية التي يكون مجموع صورتها ومخرجها (بسطها ومقامها) مساوية أولا لعدد ١ ثم للعدد ٢ ثم للعدد ٣ ثم...

فتنشأ لدينا المجموعة التالية:

$\frac{١}{١}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{١}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٣}{١}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ،

$\frac{٤}{١}$ ، $\frac{٥}{١}$ ، . . .

بعد ذلك نحذف الأعداد المكررة مثل :

$\frac{٢}{٢} = ١$ $\qquad$ $\frac{٣}{٣} = ١$ $\qquad$ $\frac{٤}{٤} = ١$ . . .

$\frac{٣}{١} = ٣$ $\qquad$ $\frac{٦}{٢} = ٣$ . . .

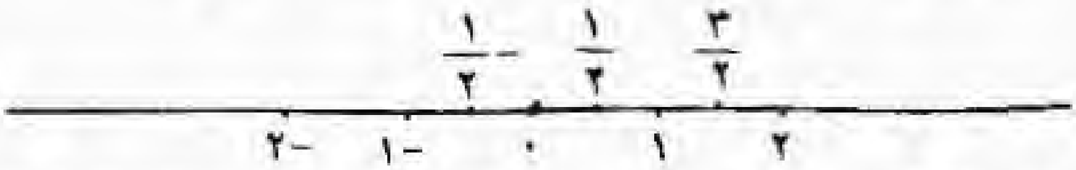
ثم نضيف إلى المجموعة المتبقية الصفر ونضيف الأعداد المعاكسة لجميع الأعداد الموجودة فيها فتنتج لدينا المجموعة :

ع = (٠ ، ١ ، -١ ، $\frac{١}{٢}$ ، - $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، -٢ ، ٣ ، -٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، - $\frac{١}{٣}$ . . .)

ولذلك فإن الرياضيين يؤكدون أنه يمكن (عد) مجموعة الأعداد العادية. إضافة لذلك فإن مجموعة الأعداد العادية هي «مجموعة متراصة» على مستقيم الأعداد، وهذا يعني أنه بين أي عددين عاديين نسبيين - مهما كانا متقاربين - يوجد عدد عادي آخر.

٢٧ - فهل يمكن لمجموعة الأعداد الطبيعية أن تكون متراصة؟؟
فكر بالإجابة على هذا السؤال.

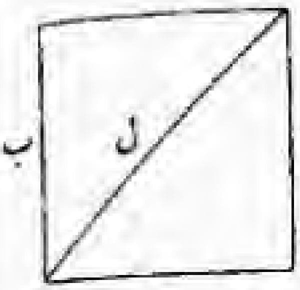
أما كيفية وضع الأعداد العادية على مستقيم الأعداد فهي كما يلي :



ورغم هذا التوسع الجديد في مجموعة الأعداد فهناك مسائل لايمكن حلها باستخدام الأعداد العادية، فهذه المجموعة ع غير كافية مثلا لحل كل المسائل التي تظهر بالتطبيق العملي. وهذه أمثلة منها.

١ ـ احسب طول قطر المربع الذي طول ضلعه ب

الحل: طول قطر المربع حسب نظرية فيثاغورس هو: ل = ب $\sqrt{٢}$



والعدد $\sqrt{٢}$ لايمكن كتابته بالشكل $\frac{ب}{جـ}$ حيث ب، جـ $\in$ ص إذن $\sqrt{٢}$ ليس عددا عاديا (نسبيا)

٢ ـ احسب طول محيط الدائرة التي نصف قطرها ر

الحل:

طول محيط الدائرة هو ط = ٢π ر

والعدد π ليس عددا عاديا اذ لايمكن كتابته بشكل كسر $\frac{ب}{جـ}$ فمن المعروف

ان π= ٣,١٤١٥٩....

٣ ـ أوجد عددا إذا ضربناه بنفسه كان الناتج ٥

واذا كتبنا هذه المسألة بواسطة المعادلات لاصبحت على الشكل التالي:

حل المعادلة س ٢ = ٥

والحل هو: س = + $\sqrt{٥}$ أو س = ـ $\sqrt{٥}$

والعدد ٥ لايمكن كتابته بشكل كسر $\frac{ب}{جـ}$ (حيث ب، جـ $\in$ ص، جـ $\neq$ ٠)

اذن $\sqrt{٥}$ ليس عددا عاديا (نسبيا).

وهناك الكثير من هذه الأمثلة التي نجد فيها أعدادا غير عادية (نسبية)، والكثير من هذه الأعداد كانت معروفة لرياضيي قدماء الأغريق. فقد عرفوا مثلا وجود العدد $\sqrt{٢}$ غير أنهم فهموه كطول قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي (وحدة) الاطوال، ولم يعتبروه عددا كباقي الأعداد.

وفي بداية القرن الثامن عشر فقط تم الاعتراف بالأعداد التي لايمكن كتابتها

بشكل كسر $\frac{ب}{ج}$ وسميت بالأعداد غير العادية (غير نسبية).

واجتماع (اتحاد) مجموعتي الأعداد العادية والأعداد غير العادية تؤلف مجموعة جديدة من الأعداد - توسع جديد لمجموعة الأعداد - هي مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بـ ح

٢٨ - هل تعرف كم عددا حقيقيا تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية؟

هناك موضوعة تقول إنه توجد أعداد حقيقية بقدر النقاط التي تؤلف مستقيم الأعداد. فكل نقطة من مستقيم الأعداد تقابل عددا حقيقيا والعكس صحيح أن كل عدد حقيقي يقابل نقطة على مستقيم الأعداد.

س - هذا يعني أن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة لانهائية تماما كمجموعة الأعداد الطبيعية، وأن العدد الرئيس لها هو $\aleph_0$ (ألف صفر) أيضا.

ج - إنك على حق تماما فمجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة لانهائية. ومع ذلك فعدد الأعداد أكثر قليلا من عدد الأعداد الطبيعية.

س - وكيف يمكن أن تكون أكثر إذا كانت الأعداد الطبيعية لانهائية؟

ج - فعلا إن الأمر مثير للحيرة والذهول، ومع ذلك صدقني. إن الرياضيين يقسمون الأيمان على أن مجموعة الأعداد الحقيقية أكثر من مجموعة الأعداد الطبيعية.

س - حسن. ولكن مامصير مفهوم اللانهائية في هذه الحالة؟

ينتج من ذلك أنه يوجد لانهايات مختلفة، إحداها لانهاية صغيرة والأخرى لانهاية كبيرة. هذا مثير للضحك. . . .

ج - ولكن الواقع هو أن الامر كما ذكرت تماما: توجد لانهايات كبيرة ومختلفة إضافة لذلك فإن أصغر هذه اللانهايات هي رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية $\aleph_0$ (ألف صفر). أما اللانهاية التي نعبر بها عن رئيس مجموعة الأعداد الحقيقية فهي $٢^{\aleph_0}$ او نرمز لها بـ C

ينتج من ذلك، بالتأكيد أن: $\aleph_0 < C$

وفي المناسبة لقد فكر الرياضيون طويلا فيما إذا كان: $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$

س - ماهذا الذي تقول؟ هل قررت أن تعبث بي؟ أم أنك تعدني غبيا لدرجة أنه لا أمل أن أفهم أي شيء في الرياضيات؟ كيف يمكن أن نتصور وجود لانهايتين($\aleph_0$ و C)؟.

ج - هدىء من روعك ولاداعي للغضب إضافة إلى أنني لست أنا من يقول هذا وإنما الرياضيات، ولقد كنت قد قرأت في مكان ما أنه يمكن برهان ذلك رياضيا، ولكني أنا الآن على عجلة من أمري، فاعذرني، علي أن أنصرف. . . .

(حسنا فعلت أنني لم أخبره عن وجود $\aleph_1$ أيضا). *

هل يمكن أن يكون: ١٠ + ١٠ = ١٠٠؟

س - ماهذا السؤال السخيف؟ إن كل طفل يعرف أن ١٠ + ١٠ = ٢٠

ج - بالتأكيد السؤال غير عادي، ولكنه ليس سخيفا لأن الآلات الحاسبة الحديثة تحسب بهذا الشكل.

س - هذا يعني أن الآلات الحاسبة الحديثة تقع في الخطأ؟

ج - بالطبع لا. الآلات لاتخطىء ولكنها وببساطة، تقوم بعمليات حسابية متبعة نظام عد آخر هو نظام العد الثنائي. فما هو مكتوب في العنوان يعني: ٢ + ٢ = ٤ ولكن الكتابة بلغة العد الثنائي الذي لم نعتد عليه ولا نستعمله (عادة)

* نرى من المفيد التوضيح للقارىء أن الرياضيين طرحوا مسألة البحث إذا كان هناك ترتيب للأعداد الكبيرة (اللانهايات) مثل $\aleph_0$ ، $\aleph_1$ (ألف واحد) $\aleph_2$ (ألف اثنين) . . كما هو الحال في ترتيب الأعداد الطبيعية. وكان السؤال عن موقع ٢ بين هذه الأعداد. وقد بين جودل Godel في عام ١٩٤٠ أنه إذا فرضنا أن $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ فإن نظرية المجموعات القائمة على مصادرات كانتور تبقى متسقة، وكذلك بين كوهن Cohen في عام ١٩٦٣ أن نفي هذا التساوي لا يخل بذلك التناسق. فالموقف يشبه (مسألة) التوازي عند اقليدس. فإذا أخذنا بوجهة نظر اقليدي فسنحصل على الهندسة الاقليدية، وإذا عبرناها فسنحصل على الهندسة اللااقليدية

في عملياتنا الحسابية، ومع ذلك فإن لنظام العد الثنائي حسنات ومزايا كثيرة وسوف أحاول أن أوضح لك بعضا من هذه المزايا بعد أن نتعرف على هذا النظام: نحن نكتب كل الأعداد في نظام العد العشري المؤسس على العدد عشرة. في هذا النظام للعد نكتب الأعداد بواسطة الأرقام العشرة التالية:

٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩.

إضافة لذلك، فإن كل رقم في أي عدد لايملك فقط قيمة عددية (لكونه ٦ أو ٧) ماذا نعني بذلك؟

إذا أخذنا العدد ٦٦٦٦ مثلا. فهو مؤلف من أربعة أرقام متساوية هي الرقم ٦ إذن كلها تملك نفس القيمة العددية (٦) ولكن في نفس الوقت، فإن لكل رقم منها قيمة أخرى مرتبطة بموضع هذا الرقم في العدد كله. فإذا نظرنا إلى الأرقام المكونة لهذا العدد من اليمين إلى اليسار كان الأول منها يعني عدد الوحدات (الوحدات) والثاني هو عدد العشرات، والثالث هو عدد المئات، والرابع هو عدد الألوف.

وفي النظام العشري نعبر عن هذه القيم العددية للأرقام بواسطة ضربها بالقوى الصحيحة للعدد عشرة: $١٠^{١}$ $١٠^{٢}$ $١٠^{٣}$... وهكذا فالعدد ٦٦٦٦ يمكن كتابته بالشكل:

$$٦٦٦٦ = ٦ \times ١٠^{٣} + ٦ \times ١٠^{٢} + ٦ \times ١٠^{١} + ٦ \times ١٠^{٠}$$

$$= ٦ \times ١٠٠٠ + ٦ \times ١٠٠ + ٦ \times ١٠ + ٦ \times ١$$

10 ـ حاول أنت الآن أن تكتب الأعداد:

١٩، ٢٣٤، ٩٠٣، ١٤٦٩

باستخدام الأرقام (٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) والقوى الصحيحة للعشرة.

وإذا أخذنا أساس العد عددا أكبر من العدد ١٠ عندئذ يجب أن ندخل أرقاما جديدة، غير أن كتابة أي عدد سوف تصبح أقصر. مثلا: إذا اعتمدنا نظام

العدد الساعي (الذي أساسه العدد ١٢) عندئذ يصبح أي عدد ـ مهما يكن كبيرا ـ هو احد الأعداد التالية فقط: (١، ٢، ٣، . . . ، ١٢)

فالعدد ١٥ في نظام العد العشري سوف يصبح ٣ في نظام العد الساعي والعدد ١٠٩ في نظام العد العشري هو ١ في نظام العد الساعي.

وإذا أخذنا أساس العد عددا أصغر من العدد ١٠ فعندئذ سوف يلزمنا رموز أقل لكتابة أي عدد، ولكن الكتابة تصبح أطول بكثير. مثلا: عندما نأخذ نظام العد الثنائي، أي نظام العد الذي أساسه ٢ عندئذ يكفينا رمزان لكتابة أي عدد مهما يكن كبيرا، هذان الرمزان هما ٠، ١ (الصفر والواحد) اما العدد ٢ فهو يلعب دور العشرة في العد العشري.

لنر كيف نكتب العدد نفسه في النظام العشري والنظام الثنائي:

في النظام العشري	في النظام الثنائي
١ (= ٢^{٠} = ١ × ٢^{٠})	= ١
٢ (= ٢^{١} = ١ × ٢^{١} + ٠ × ٢^{٠})	= ١٠
٣ (= ٢^{١} + ١ = ١ × ٢^{١} + ١ × ٢^{٠})	= ١١
٤ (= ٢^{٢} = ١ × ٢^{٢} + ٠ × ٢^{١} + ١ × ٢^{٠})	١٠٠
(= ٤ + ١ = ١ × ٢^{٢} + ٠ × ٢^{١} + ١ × ٣^{٠})	= ١٠١

30 ـ والآن حاول أن تكتب الأعداد التالية في نظام العد الثنائي:

١٧، ٢٣، ٤٥، ١١٥، ٣٢٤، ٦٤٠، . . .

وهذه بعض الأمثلة الأخرى:

٦ (= ٤ + ٢ = ١ × ٢^{٢} + ١ × ٢^{١} + ٠ × ٢^{٠}) = ١١٠

٧ (= ٤ + ٢ + ١ = ١ × ٢^{٢} × ١ × ٢^{١} + ١ × ٢^{٠}) = ١١١

٨ (= ٢^{٣} = ١ × ٢^{٣} + ٠ × ٢^{٢} + ٠ × ٢^{١} + ٠ × ٢^{٠}) = ١٠٠٠

٩ (= ٨ + ١ = ١ × ٢^{٣} + ٠ × ٢^{٢} + ٠ × ٢^{١} + ١ × ٢^{٠}) = ١٠٠١

١٠٠ (= ٦٤ + ٣٢ + ٤ = ...) = ١١٠٠١٠٠

لقد مللت من هذه الكتابة. حاول أن تجيب على السؤال الذي طرحته عليك وأن تكتب الأعداد التي أعطيتك إياها بالنظام الثنائي. أعتقد أنك استوعبت طريقة تحليل العدد وفق قوى العدد ٢ وذلك أثناء الانتقال بالعدد من النظام العشري إلى النظام الثنائي فمن السهل أن نحفظ أن:

$٢^{٠} = ١ \quad ٢^{١} = ٢ \quad ٢^{٢} = ٤ \quad ٢^{٣} = ٨ \quad ٢^{٤} = ١٦$

$٢^{٥} = ٣٢ \quad ٢^{٦} = ٦٤ \quad ٢^{٧} = ١٢٨ \quad ٢^{٨} = ٢٥٦$

والآن يمكنك أن تتحقق بنفسك أن في النظام العشري: ٢ + ٢ = ٤، أما في النظام الثنائي فإن ١٠ + ١٠ = ١٠٠

فجدول الجمع في النظام العشري هو:

٠ + ٠ = ٠   ١ + ٠ = ١   ١ + ١ = ١٠   ... وهكذا فإن:

١٠ + ١٠ = ١٠٠

ونقرأ: صفر مع صفر يعطي صفرا (ونكتب صفرا)

واحد مع واحد يعطي ١٠ (ونكتب اثنين. ولكن في النظام الثنائي أي ١٠)، فإذا أردنا جمع ١٢ + ١٣ في النظام الثنائي فإننا نكتب ذلك بالنظام كما يلي:

$$\begin{array}{r} ١١٠٠ \\ + \ ١١٠١ \\ \hline ١١٠٠١ \end{array}$$

يمكن استخدام هذا النظام الثنائي أيضا في العمليات الحسابية الأخرى الضرب والطرح والتقسيم، والرفع لقوة...

فجدول الضرب مثلا هو:

٠ × ٠ = ٠   ٠ × ١ = ٠   ١ × ١ = ١

س - حسنا. إن كل ماذكرته لي عن النظام الثنائي شيء جميل، ولكني مع ذلك لم أفهم بماذا يمتاز هذا النظام عن النظام العشري إذا كنا نستخدم من أجل كتابة أي عدد فيه رموز أكثر مما نستخدم في النظام العشري؟

ج - أنت محق. فكتابة العدد في النظام الثنائي ليس عملية بسيطة، ولذلك فهذا

النظام للعد لايستخدم في الحياة اليومية، تصور مثلا كم سيكون لك من الجيوب لوضع النقود فيها اذا كانت مكتوبة بالنظام الثنائي، ولكنك تصرفها وكأنها مكتوبة بالنظام العشري؟ (أي بدل ان تصرف مبلغ ليرتين المكتوب بالنظام الثنائي ١٠، فأنت تصرفه وكأنه مكتوب بالنظام العشري أي تصرف عشر ليرات)، ومع ذلك فالنظام الثنائي للعد له العديد من الميزات وأول هذه الميزات أنه يستخدم لكتابة الأعداد فيه رمزان فقط. وليس من الضروري أن يكون هذان الرمزان هما الصفر والواحد. فالرمزان يمكن أن يكونا خطين صغيرين أحدهما أفقي والآخر عمودي أي (ـ، ١) وقد يكون الرمزان نقطة وخطا (٠، ـ) أو مصباحا كهربائيا.

(المصباح مضيء، المصباح مطفأ). فاذا استخدمنا المصباح يمكننا أن نجمع بالشكل التالي:

○●○	أو : ١٠١
+ ○○●	+ ١١٠
○●○○	١٠١١

باعتبار: ○ ـ المصباح مضاء

● ـ المصباح مطفأ.

31 ـ بالتأكيد لقد عرفت ماتعنيه الصورة السابقة وهي ٥ + ٦ = ١١

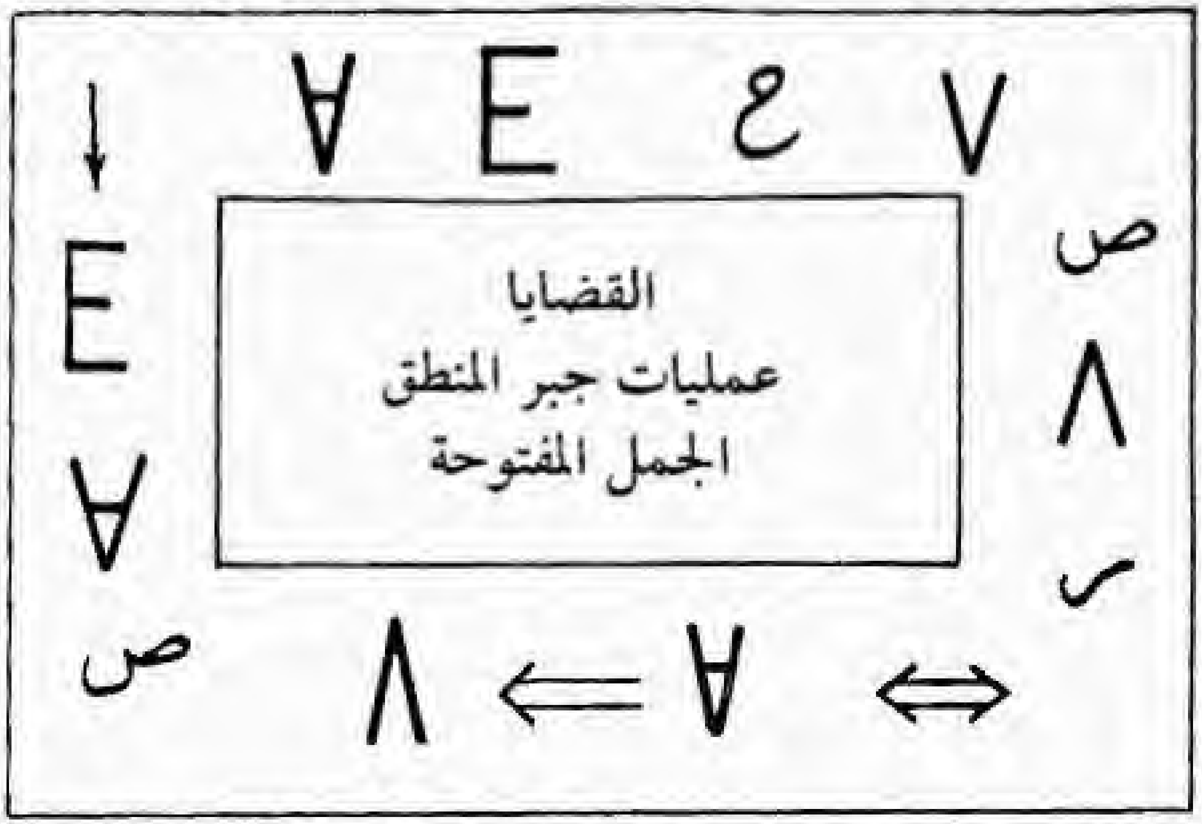
وهذه الميزة للنظام الثنائي في عمل الآلات الحاسبة ذات العمليات السريعة، مادام أنه بواسطة الوصل والفصل الكهربائيين يمكن تحقيق الرمزين ٠، ١ مئات المرات وبسرعة إذ أن: المصباح مضاء ١ المصباح مطفأ.

نلاحظ أنه بهذا الوصل يمكن تحقيق الرمزين ٠، ١ مئات بل آلاف المرات في ثانية واحدة. وأظن أيضا أن طول كتابة العدد في هذه الحالة ليس له أي

أهمية. وهكذا. . . إذا رأيت في المستقبل كتابة رياضية وراودك الشك في امكانية الحكم على صحتها فعليك ألا تحكم مباشرة بعدم صحتها. يجب أن تتساءل أولا: (في أي نظام من أنظمة العد يمكن أن تكون هـذه الكتابة صحيحة؟).

الفصل الثالث

عمليات جبر المنطق الجمل المفتوحة



ج ـ هل أعجبتك صورة العنوان؟ اعتقد أنها تعبر عن نفسها بدقة.

س ـ بالطبع اعجبتني. أولا يمكن أن تكون أكثر جمالا من هذا، وانا لااستطيع أن امتلك نفسي من السعادة عندما أقرأ مثل هذه العناوين!! ولكني مع ذلك، أعتقد أن العنوان غير كامل، أليس كذلك؟.

ج ـ غير كامل؟ من الممكن أن يكون العنوان غير كامل. ولكن.... لااستطيع أن أفهم ماذا تريد وراء تلميحك هذا؟

س ـ العنوان تنقصه إشارة استفهام كبيرة.

ج ـ أنت محق. ولكن قل لي رايك بصراحة: حول أي شيء يدور الحديث وراء هذا العنوان؟

س ـ أعتقد أنه يدور حول المسائل.

ج ـ لا.

س ـ إذن يدور الحديث حول الإشارات والرموز.

ج ـ لا لم تحزر بعد.

س ـ أعتقد أنها مقطع من رواية حديثة أو انها مجرد مجموعة كلمات. من يدري؟. لا. مع ذلك فأنا أعتقد أنها عبارات ما رياضية.

ج ـ لقد اقتربت من الحقيقة فالعنوان يحوي الرموز والمصطلحات المستخدمة في الرياضيات الحديثة وبالأصح : في المنطق الرياضي.

س ـ لقد تصورت ذلك أيضا رغم أنها لاتشبه الرموز الرياضية. ولكن ماذا تعني هذه الرموز؟

ج ـ سوف نتعرف على هذه الرموز والمصطلحات بشكل مختصر، ونوضح جوهر هذه الرموز واستخدامها أثناء دراسة المفاهيم الأساسية للمنطق الرياضي. أي أننا سوف نقوم بترجمة هذه الرموز إلى اللغة العادية التي نستعملها، فهذه الرموز ماهي إلا اختصار لكلمات أو بدل بضع كلمات.

س ـ وماذا يدرس المنطق الرياضي؟

ج ـ من الصعب أن نوضح ذلك في بضع كلمات، ومع ذلك يمكننا القول إن المنطق الرياضي هو علم التفكير، أو هو العلم الذي يبحث بتدريس أشكال التفكير المنطقي والعلاقة بينها، والعمليات التي تساعد على تحقيقها. أما أشكال التفكير المنطقي فهي المفاهيم والقضايا.

القضايا (العبارات)

س ـ ماذا يمكن أن يكون من القضايا (العبارات) في الرياضيات؟ وهل لهذه القضايا أي علاقة بالقضايا التي تقام على الناس أو بالحكم القضائي عليهم؟

ج - بالطبع لايوجد ارتباط مباشر بينهما ولكن سؤالك لايخلو من المنطق. فالقاضي كما هو معروف يمكن أن يعطي حكمه فقط على أساس الحقائق التي يتوصل إليها. وكذلك القضية في الرياضيات تفهم على أنها تأكيد لبعض الحقائق مثلا: الطلاب يحبون الرياضيات - هي قضية (عبارة).

س - ولكن هذا غير صحيح فأنا لاأحب الرياضيات.

ج - لا بأس - في هذه الحالة سوف ينطق القاضي بالحكم «القضية غير صحيحة» أو «شهادة غير صحيحة». والقضايا في الرياضيات لايمكن أن تكون عفوية. فالقضية (العبارة) يجب أن يكون لها معنى ويمكن أن نحكم عليها بإحدى الصفتين التاليتين:

القضية صحيحة أو القضية خاطئة

س - كيف يمكن أن نفهم الطلب: إن القضية يجب أن تكون ذات معنى؟

ج - يمكن أن تفهم ذلك بسهولة بالأمثلة. فالجملة الخبرية:

«القطار يرقص على أنغام الموسيقا مع المطر» ليست قضية لأنها بدون معنى، ولذلك فنحن لن نطرح هنا سؤالا حول صحتها أو عدم صحتها. غير أنه يجب أن نكون شديدي الحذر فهناك بعض الجمل الخبرية التي تبدو لبعض الناس أنها بدون أي معنى (اي ليست قضية)، بينما تبدو للآخرين أنها تحمل معنى محددا - أي أنها قضية.

س - هل يمكنك أن تعطيني مثالا توضيحيا؟

ج - إليك هذا المثال: «كوكب الشرق تغني» - إن اولئك الناس الذين لايعرفون أم كلثوم سوف يعتبرون أن ليس لهذه الجملة الخبرية معنى، أما من يعرف أن أم كلثوم هي كوكب الشرق فسوف يعتبر العبارة ذات معنى - ومع ذلك فهذه الجملة الخبرية ليست قضية (عبارة). وكمثال آخر على جملة خبرية ليست قضية يمكن أن نورد هذا الإعلان المازح لأحد أصحاب المطاعم «اليوم تدفع الحساب وغدا تأكل مجانا» فهو يستطيع أن يكتبه بشكل اكثر بساطة كما يلي:

«غدا نقدم الطعام مجانا». فالقضية يجب أن تكون جملة خبرية صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت الجملة الخبرية صحيحة وخاطئة في نفس الوقت فهي ليست قضية.

س - وهل توجد جمل خبرية صحيحة وخاطئة في نفس الوقت؟

ج - نعم توجد. مثلا: أنا ذاهب إلى المدرسة. هذه جملة خبرية ذات معنى، ولكنها الآن خاطئة، ومن الممكن أن تكون صحيحة (في ذلك الوقت الذي أكون فيه ذاهبا إلى المدرسة).

س - هذا واضح. ولكن هل توجد جمل خبرية لايمكن أن تقول عنها إنها صحيحة، ولايمكن أن تقول إنها خاطئة.

ج - يوجد. . . مثال عليها: نشرة الأخبار الجوية.

س - حسن، لقد فهمت. والآن أخبرني هل الجملة الخبرية: ٤ + ٣ = ٧ قضية؟

ج - بالطبع هي قضية، إضافة إلى أنها قضية صحيحة. ولكي لايضطر الرياضي إلى ابراز الجمل الخبرية التي تؤلف قضايا فإنه يستخدم رموزا أو أحرفا ق، ك، ل. . . للدلالة على هذه القضايا مثلا:

ق ≡ ٣ + ٤ = ٧

وعندما يتحدث أو يصف المساواة ٣ + ٤ = ٧ فإنه يكتب ق بدلا من الجملة الخبرية المطولة.

س - مفهوم. إذن الرياضي يكتب (ق صحيحة) بدل القول (القضية ٣ + ٤ = ٧ صحيحة).

ج - لا. الرياضي يكتبها بشكل اكثر اختصارا. فهو يرمز لصحيحة بالرمز ص (أو الواحد)، ويرمز لخاطئه بالرمز خ (او الصفر).

س - بهذا الشكل ستكون العبارة مختصرة جدا أثناء الكتابة.

ج - وهذا ماكنت قد أخبرتك به: إن الرياضي لايحب أن يكتب كثيرا فشعاره

دائما: كلما كانت الكتابة أكثر اختصارا كلما كانت أكثر وضوحاوفهما. إضافة لذلك فإن مايهم الرياضيين هو قيمة هذه القضية (صحيحة أو خاطئة) وليس ماتحويه هذه القضية من معلومات. أي أن مايهمهم هو ص، خ التي تتمتع بها القضية وليس أكثر من ذلك.

عمليات المنطق الرياضي، أو كيف يمكن أن نحصل على قضية جديدة من قضايا معروفة؟.

س ـ هل يمكن أن نجري على القضايا عمليات الجمع والطرح والضرب... كما هي الحال في الأعداد؟.

ج ـ العمليات على القضايا ليست تماماً نفس العمليات على الأعداد، ولكن يوجد بعض الشبه بينهما. تذكر أننا استخدمنا أيضاً العمليات على المجموعات (التقاطع والاجتماع و.....) وحصلنا بالناتج على مجموعات جديدة. أما العمليات الأساسية على القضايا فتبدو بألفاظ غريبة نوعاً ما. ولكن عليك الا تحتج لأنك سوف تعتاد عليها بسرعة وسهولة.

س ـ وما أسماء هذه العمليات؟.

ج ـ هذه العمليات نسميها أدوات الربط وهي:

و	$\wedge$	(الربط بـ و)
أو	$\vee$	(الربط بـ أو)
إذا ... فإن	$\Leftarrow$	(الاقتضاء الرياضي)
إذا وفقط إذا	$\Leftrightarrow$	(التكافؤ)
العملية	$\sim$	نفي القضية

س ـ هل هذه أسماء العمليات.... أنا لن أتمكن من حفظها أبدا.

ج ـ أنت لست قردا أو ببغاء حتى ترددها ورائي مباشرة.

سوف نبحث هذه العمليات بالترتيب وسوف تفهم ما يعني كل منها وهذا هو المطلوب.

العمليـــة ∧

ج ـ هذه العملية يمكن أن تحفظها كأداة الربط «و».

س ـ ولماذا «و» بالذات؟.

ج ـ لأن هذه العملية تربط بين قضيتين ق١ ، ق٢ بأداة الربط «و» أي أنه: إذا كانت ق١ ، ق٢ قضيتين فإن:

ق١ ∧ ق٢ قضية جديدة تعني أيضا ق١ و ق٢ مثلا:

إذا كانت ق١ = الطقس اليوم جيد، ق٢ = ذهب أحمد للنزهة

فإن القضية ق١ ∧ ق٢ = (الطقس اليوم جيد) و (ذهب أحمد للنزهة).

س ـ والقضية الجديدة هل هي صحيحة أم خاطئة؟

ج ـ صحة وخطأ القضية الجديدة ق١ ∧ ق٢ مرتبطان بصحة وخطأ القضيتين ق١ ، ق٢. فالقضية ق١ ∧ ق٢ تكون صحيحة بالتعريف إذا وفقط إذا كانت كل من ق١ وق٢ صحيحتين.

س ـ وإذا كانت إحداهما خاطئة؟

ج ـ إذا كانت إحداهما خاطئة عندئذ ق٢ خاطئة أيضاً. وبصورة عامة: عند جمع قضيتين بواسطة عملية ربط معينة فالقضية الناتجة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة. فمن أجل القضية الناتجة سوف يكون لدينا أربع حالات وهي:

عندما	ق١	صحيحة	و	ق٢	صحيحة
عندما	ق١	صحيحة	و	ق٢	خطأ
عندما	ق١	خطأ	و	ق٢	صحيحة
عندما	ق١	خطأ	و	ق٢	خطأ

وبحسب تعريف ق١∧ ق٢(صحيحة وإذا وفقط إذا كانت كل من ق١ وق٢

صحيحتين) فإن جدول الصواب للقضية الناتجة في هذه الحالات الأربع يمكن اعطاؤه بالشكل التالي:

ق١	ق٢	ق١ ٨ ق٢
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

س ـ ولماذا هذا الشكل للجدول بالذات؟

ج ـ كيف ولماذا ؟ إن هذا الجدول هو ما نحصل عليه استنادا إلى تعريف عملية الربط و. تذكر أن القضية ق١ ٨ ق٢ ـ بحسب التعريف ـ صحيحة فقط في حالة ق١ صحيحة و ق٢ صحيحة، وفي بقية الحالات تكون ق١ ٨ ق٢ خاطئة. والآن حاول أن تفهم وتفسر لنفسك هذا الجدول.

س ـ حقاً. كل شيء واضح ومفهوم في الجدول.

ولكني أتساءل: هل يمكن استخدام الرمز ٨ في حالة أخرى غير القضايا؟

ج ـ بالتأكيد. ففي كل عبارة رياضية معقدة ومؤلفة من عدة عبارات مرتبطة ببعضها بأداة الربط و، نضع بدل أداة الربط و، الرمز ٨. مثلا:

لقد عرفنا تقاطع المجموعات بالشكل:

سـ∼ ∩ عـ∼ = {س : س ∈ سـ∼ و س ∈ عـ∼} يمكن أن نكتبها:

سـ∼ ∩ عـ∼ = {س : س ∈ سـ∼ ٨ س ∈ عـ∼}

سـ∼ / عـ∼ = {س : س ∈ سـ∼ ٨ س ∉ عـ∼}

سـ∼ × عـ∼ = {(س، ع): س ∈ سـ∼ ٨ ع ∈ عـ∼}

. . . .

* تسمى هذا الجدول «جدول الصواب» أو «جدول الصحة» بغض النظر عما إذا كانت ق١ ٨ ق٢ صحيحة أو خاطئة. [المحرر]

س ـ هل يمكننا انشاء جدول الصواب لعمليات أخرى على القضايا؟
ج ـ بالتأكيد يمكن ذلك. ولكن يجب أن تتعرف أولا على هذه العمليات وإليك العملية التالية:

العمليـــة $\vee$:

ج ـ وهذه العملية تسمى أيضا العملية أو.
س ـ ولماذا تسمى «أو»؟.
ج ـ لأن القضية الجديدة ق١ $\vee$ ق٢ تنتج من القضيتين ق١، ق٢ وهي صحيحة إذا وفقط إذا كانت إحدى القضيتين ق١ أو ق٢ صحيحة. وإليك مثالا على هذه القضية الجديدة: «يسجل في السنة الثانية من الجامعة أولئك الطلاب الذين أنهوا السنة الأولى بنجاح، أو أنهم قد اجتازوا الامتحانات التكميلية».
من الواضح هنا أنه يكفي ان يكون الطالب محققا لإحدى القضيتين:
ق ١ = أنهى السنة الأولى بنجاح.   أو
ق ٢ = اجتاز الامتحانات التكميلية.
حتى تصبح القضية الجديدة كلها صحيحة.
إذن فالقضية الناتجة ق١ $\vee$ ق٢ صحيحة إذا كانت إحدى مركبتيها صحيحة.
إذن ق١ $\vee$ ق ٢ تكون خاطئة فقط في حالة كون ق١ خاطئة و ق٢ خاطئة.
هل تستطيع وضع جدول لهذه القضية ؟
س ـ بالتأكيد أستطيع. وهذا هو جدول الصواب:

ق ١	ق ٢	ق١ $\vee$ ق٢
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

ولكن هل يستخدم الرمز ٧ في مكان آخر؟

ج - بالتأكيد يمكن ان نستخدمه مثلا عند تعريف اجتماع المجموعات مثلا:

ص ∪ ع = { س : س ∈ ص ٧ س ∈ ع }.

ولننتقل إلى عملية أخرى على القضايا.

عملية الاقتضاء المنطقي:

ج - لنتعرف الآن على عملية الاقتضاء المنطقي، والتي يرمز لها بالرمز ⇐ . وهذه العملية تحدد العلاقة التي تربط بين السبب والمسبب وتقرأ: إذا . . . . فإن . . . . ، مثلا:

إذا سقط المطر فإن الشارع يبتل، إذا رمزنا بـ ق للقضية: سقط المطر ك للقضية: الشارع يبتل

فإن ق ⇐ ك تعني أن «تحقيق ق يؤدي إلى تحقيق ك». أو «ق تقتضي ك»، أو «من ق تنتج ك»، أو إذا تحققت ق فإن ك تتحقق»

إن القضية ق ⇐ ك ككل تعكس الرابطة بين ق، ك تلك الرابطة التي يمكن التعبير عنها بالكلمات كما يلي:

«لا يمكن أن تتحقق ق دون أن تتحقق ك». فالاقتضاء في الواقع ينتج من قضيتين، والقضية الناتجة بالاقتضاء (أي ق ⇐ ك) خاطئة فقط في تلك الحالة التي تكون القضية الأولى صحيحة والثانية خاطئة: وفي بقية الحالات يكون الاقتضاء (ق⇐ ك)* صحيح. إذن فجدول الصواب لهذه القضية يكون على الشكل التالي:

---

* درج البعض على استخدام ⇐ في الرياضيات للإشارة إلى أن القضية التي تصدر عنها صحيحة. وفي الحالات العامة يستخدم الرمز ← بدلا منها. [المحرر]

ق ⇐ ك	ك	ق
ص	ص	ص
خ	خ	ص
ص	ص	خ
ص	خ	خ

مثال عددي ، ق ≡ ٢×٢=٤

ك ≡ ٣×٣=٩

ق ⇐ ك صحيحة

مثال آخر : إذا كان ق = ٢×٢=٧ (خطأ)

ك = ٣×٣= ٦ (خطأ)

فإن ق⇐ك صحيحة .

وهذا المثال نقرؤه كما يلي/ إذا كان (حاصل ضرب) ٢×٢ يساوي سبع فإن القضية ٣×٦=٦ صحيحة .

س ـ ما أغرب ذلك . إن هذا يعني أنه يمكن أن نتوصل إلى قضية صحيحة انطلاقا من قضيتين خاطئتين .

ج ـ نعم شيء من هذا القبيل . يمكن أن نورد أيضاً الأمثلة التالية على الاقتضاء* :

■ إذا كانت الأوزة أسرع من الباص فإن ٢+٣=٨ أو : ■ إذا كان اليوم يساوي ٢٠ ساعة فإن الجسر فوق النهر مصنوع من الحلوى .

بحسب تعريف الاقتضاء (الاقتضاء خاطىء فقط في حالة كون المقدمة أو القضية الأولى صحيحة والنتيجة أو القضية الثانية خاطئة) فإن القضية

* نود أن نشير لبعض الفائدة ـ إلى أن الاقتضاء أو الاشتراط المنطقي لا يفترض بالضرورة وجود علاقة بين قضية (عبارة) الشرط ق والقضية الثانية أو جواب الشرطك في ق ⇐ ك . وهذا توسع للاقتضاء الذي يفترض وجود مثل هذه العلاقة وهو توسع مفيد رياضيا) .

[المحـــــرر]

الأخيرة صحيحة. وإذا تراءى لك أن هذا الأمر غريب بعض الشيء فلا تقلق لأن القضية لا تتضمن أي شيء خطير ذلك لأنه ـ وفق تعريف صحة الاقتضاء ـ لا يمكن لأحد أن يبرهن أن ٢+٣=٨ أو أن اليوم يساوي ٢٠ ساعة.

س ـ من كان يعتقد أنه يمكن أن نتوصل في الرياضيات إلى قضية صحيحة انطلاقا من قضيتين خاطئتين.

ج ـ حقاً. ولكن تذكر أنه وفق هذا التعريف غير العادي فإن القضية التالية خاطئة: «إذا كانت علامتك في الرياضيات صفرا فأنت من الممتازين» وذلك في حالة كون القضية الأولى صحيحة (بالطبع).

التكافـــؤ:

ج ـ لنتعرف الآن على حالة خاصة أخرى من الاقتضاء، تلك الحالة التي يمكن تغيير أماكن القضايا ق، ك فيها أي تلك الحالة التي تكون فيها ق $\Longrightarrow$ ك صحيحة، وك $\Longrightarrow$ ق صحيحة، وسوف نوضح ذلك بأمثلة متعددة. فكر الآن ثم أجب على السؤال التالي:

إذا كانت لدينا القضية «إذا هطل المطر فإن الشارع يبتل». فهل يمكننا أن نستنتج القضية التالية «إذا كان الشارع مبتلا فإن المطر هطل»؟.

ج ـ واضح أن هذه النتيجة ممكنة ذلك أن الشارع لا يمكن أن يكون مبتلا مالم يهطل المطر.

ج ـ هذا غير صحيح تماما. فقد تكون سيارة البلدية هي التي قامت برش الشارع بالماء.

ج ـ آه. نعم هذا ممكن.

ج ـ لذا يجب أن نكون حذرين في اعطاء النتائج. ويجب أن نأخذ بعين الاعتبار كل الامكانات النظرية. إذن في مثالنا إذا كانت القضية «إذا هطل المطر فإن الشارع يبتل» صحيحة فإن القضية المعاكسة (إذا كان الشارع مبتلا فإن المطر

قد هطل) ليست صحيحة بالضرورة. ولكن إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان س، ع، يمكن أن نكتب القضية المركبة التالية: «إذا كان المستقيم س يوازي المستقيم ع فإن المستقيم ع يوازي المستقيم س»، أو اختصارا «إذا كان س // ع فإن ع // س».

فهل تكون القضية المعاكسة صحيحة في هذه الحالة؟.

أي هل القضية:

س ————————

ع ————————

«إذا كان ع يوازي س فإن س يوازي ع» صحيحة؟

س ـ في هذه الحالة لا يوجد جدال على الصحة المنطقية لهذه العبارة.

ج ـ صحيح، أنت على حق. فإذا رمزنا للقضية س // ع بـ ق، والقضية ع // س ب ك فإن: ق = س // ع ، ك = ع // س

عندئذ يكون: ق ⟸ ك و ك ⟸ ق.

في هذه الحالة نقول إن القضيتين ق، ك مرتبطتان بواسطة علاقة التكافؤ، أي أن القضيتين ق، ك متكافئتان، ونرمز لذلك بالشكل ⟺ فبدلا من أن نكتب: ق ⟸ ك و ك ⟸ ق نكتب ق ⟺ ك ونقرؤها: تكون ق إذا وفقط إذا كانت ك

لنأخذ مثالا آخر. لدينا القضية المركبة التالية: «إذا كان المثلث ب جـ د قائم الزاوية فإن نظرية فيثاغورس تتحقق في هذا المثلث». وهذه قضية صحيحة.

لنأخذ القضية المعاكسة: «إذا كانت نظرية فيثاغورس محققة في مثلث ب جـ د فإن هذا المثلث قائم الزاوية». وهذه أيضا قضية صحيحة. فإذا رمزنا للقضية الأولى «المثلث ب جـ د قائم الزاوية» بـ ق والثانية «نظرية فيثاغورس تتحقق في هذا المثلث» بـ ك فإن القضية المركبة الأولى يمكن كتابتها على الشكل ق ⟸ ك، والقضية المركبة الثانية نكتبها على الشكل ك ⟸ ق في هذه الحالة تكون القضيتان ق، ك متكافئتين ونرمز لذلك بأحد الأشكال الرياضية التالية:

ق⇔ك، أو ك شرط لازم وكاف لـ ق، أو الشرط ق يكافىء الشرط ك..

فهل أدركت الآن ماذا نعني بالكتابة: «ق⇐ك و ك⇐ق».

س - نعم. هذه الكتابة تعني أنه: تتحقق ك إذا تحققت ق، وتتحقق ق إذا تحققت ك.

ج - صحيح. ويمكن أن نعبر عنها بالشكل ق⇔ك أي أن: (ق⇐ك) ∧ (ك⇐ق) = ق⇔ك. ويمكن فهم هذه المساواة كتعريف للتكافؤ والقضية ق⇔ك تكون صحيحة فقط في تلك الحالة التي يكون فيها ق،ك صحيحتين بنفس الدرجة. أي أن القضية ق⇔ك تكون صحيحة عندما تكون القضيتان ق،ك صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً. أما جدول الصواب لهذه القضية (قضية التكافؤ) فهو على الشكل التالي:

(نكتب جدول صواب ق⇔ك ونربطه بجدول صواب القضيتين: ق⇐ك و ك⇐ق) نورد هنا بعض الأمثلة والجدول:

ق=٢+٢=٤	ك=٣+٤=٧	ق⇔ك ص
ق=٢+٢=٤	ك=٣+٤=٥	ق⇔ك خ
ق=٢+٢=٣	ك=٣+٤=٧	ق⇔ك خ
ق=٢+٢=٥	ك=٣+٤=٨	ق⇔ك ص

ق	ك	ق⇐ك	ك⇐ق	ق⇔ك*
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

* نود أن ننبه إلى أن القراءة العامة للقضية ق⇔ك هي «ق إذا وفقط إذا ك» كما نقرؤها «ق تكافىء ك إذا كانت ق، ك صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً فالقضيتان المتكافئتان هما قضيتان تحملان نفس قيمة الصحة. ونود كذلك أن ننبه القارىء إلى اختلاف مفهوم التكافؤ هنا عن التكافؤ بين المجموعات. وعلى الرغم من ذلك هذا الجدول يسمى جدول التكافؤ للقضايا. [المحرر]

إن كل هذه العمليات التي تعرفنا عليها، أي عمليات الربط بـ أو، والربط بـ و، الاقتضاء، التكافؤ، هي عمليات ثنائية.

س - وماذا تعني بعمليات ثنائية.

ج - العمليات الثنائية اتفاقية هي العمليات التي تربط بين قضيتين وناتج الربط يعطي قضية جديدة.

نفي القضية :

س - هل يوجد عملية تستطيع بواسطتها الحصول على قضية جديدة انطلاقا من قضية واحدة معروفة؟

ج - نعم يوجد مثل هذه العملية وهي عملية النفي ونرمز لها بـ ~ ونقرأ نفيا•.

س - هل هذا يعني أنه إذا كانت لدينا قضية ق فإن ~ق هي (نفي ق)؟

ج - نعم. والقضية ~ق صحيحة فقط في حالة كون ق خاطئة والعكس صحيح. لذلك فإن جدول الصواب بسيط جدا. أي أنه إذا كانت القضية ق هي: إني أحب الرياضيات.

س - عندئذ سوف أقول عن نفسي اختصارا: ~ق (لا أحب الرياضيات)

ج - صح. أترى كم هي بسيطة هذه العملية؟

ق	~ق
ص	خ
خ	ص

• تسمى هذه العملية «آحادية» إذ يجرى تطبيقها على قضية واحدة بخلاف العملية الاثنانية (أو الثنائية) التي يجرى تطبيقها على قضيتين معا.

(المحرر)

جبر المنطق

س ـ لقد رأينا أن أحد العناوين الفرعية لهذا البحث: جبر المنطق، وعنوان آخر هو: عمليات جبر القضايا. فماذا يعني هذا؟ وهل يوجد جبر في المنطق؟

ج ـ نعم يوجد جبر في المنطق. ذلك أن عمليات منطق القضايا التي تعرفنا عليها تتمتع بخواص جبرية معينة.

س ـ ما هي هذه الخواص بالتحديد؟

ج ـ لقد تعرفت فيما سبق على هذه الخواص، فهي نفس الخواص التي تعرفت عليها على الأعداد وإليك بعض هذه الخواص على الأعداد:

الخاصة التبديلية : ب + جـ = جـ + ب

الخاصة التجميعية : (ب + جـ) + د = ب + (جـ + د)

الخاصة التوزيعية : ب (جـ + د) = ب جـ + ب د

خاصة الصفر المحايد : ب + ٠ = ب وغيرها من الخواص.

ولنأخذ منها مثلا الخاصة التبديلية. هذه الخاصة صحيحة أيضا بالنسبة لعملية الربط بـأو، وعملية الربط بـو، والتكافؤ. وهذا يعني أنه إذا كانت ق،ك قضيتين فإن:

ق ٧ ك = ك ٧ ق

ق ٨ ك = ك ٨ ق

(ق ⟺ ك = ك ⟺ ق

وإذا سألت الرياضي «ما جبر المنطق؟» فإنه سوف يجيبك باختصار بما يلي:

«جبر المنطق هو البنية ({ص، خ}، ٧، ٨، ⟸، ⟺، ~)

بحيث أن العمليات ٧، ٨، ⟸⟺، ~ تتمتع بجداول الصواب الموافقة (والتي رأيناها في الصفحات السابقة)».

س ـ إذا كان هذا ما سيجيبنا به الرياضي، فمن الأفضل عدم سؤاله عن أي

شيء، ومع ذلك فإن جبر المنطق شيء جيد لأنه لا يحوي أي قوانين.

ج - لا يحوي أي قوانين؟ إنك مخطىء كثيرا. كيف يمكن أن تكون رياضيات بدون قوانين وحسابات؟

س - وكيف نعرف القانون في جبر المنطق؟

ج - قانون جبر المنطق هو: عبارة مؤلفة من ثوابت ومتغيرات. والعمليات ٧، ٨، ⇐، ⟺، ~ باستخدام الأقواس (أي أن العمليات ٧، ٨، ⇐، ⟺، ~ تؤثر على القضايا كعمليات ثنائية).

س - لقد ذكرت أنه يوجد ثوابت. فما هذه الثوابت؟

ج - الثوابت هي القيم ص، خ، إذن فالمجموعة التي تحدد البنية الجبرية والتي تسمى جبر المنطق مؤلفة من عنصرين، أي {ص، خ}.

س - وما المتحولات أو المتغيرات؟

ج - هي الرموز أو الأحرف س، ع، ص، ق، ك. . . التي نرمز فيها للقضايا.

س - كيف ننشىء إذن قواعد جبر المنطق؟

ج - ننشئها ببساطة على الشكل التالي:

ق ≡ (ق ٨ ك) ٧ ل.

ك ≡ س ⇐ ص.

ل ≡ س ٧ (~ع) ⇐ ص.

~(ق ٧ ك) = (~ق) ٨ (~ك) ①.

~(ق ٨ ك) = (~ق) ٧ (~ك).

س - حسن. ولكن كيف نعلم ما إذا كنا نستطيع وضع اشارة = بين هذه العبارات.

ج - هذا شيء بسيط يمكن أن نكتب جدول الصواب للعبارتين في الطرفين فإذا كانت لهما نفس قيم الصحة والخطأ في كل الحالات، ومن أجل جميع

الاحتمالات الممكنة لقيم القضايا المركبة لها، فإن هذا يعني أنه يمكن وضع اشارة = مثال، نأخذ القانون(١):

ق	ك	ق ٧ ك	~ (ق ٧ ك)	~ ق	~ ك	(~ ق) ٨ (~ ك)
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

قيم الطرف الاول　　　　　　قيم الطرف الثاني

س - تبدو وكأنها كلمات متقاطعة.

ج - فعلا إنها تؤلف كلمات متقاطعة منطقية إلى حد ما. وهكذا ففي هذا الجدول

برهنا على صحة القانون: ~ (ق٧ك) = (~ ق) ٨ (~ ك).

فقد برهنا في الجدول أن العبارة في الطرف الأيمن تساوى العبارة في الطرف الأيسر لأن قيم الصواب لها متكافئة.

والآن حاول أن تبرهن بنفسك ان:

32. ق ٨ ك = ك ٨ ق .

33. ق ٧ ك = ك ٧ ق .

34. ق⟺ك = ك⟺ق .

وكذلك ابحث في قيم الصواب (الصحة) لكل مايأتي:

35. ق ⟸ (ك ٨ (~ ك)).

36. ق ⟸ (ك ٨ ق).

37. (ق ٨ ك) ⟸ ق .

38. ك ⇐ (ق ٧ ك) .

س ـ أعتقد أن هذه التمارين تكفي ، ولكن هناك شيء يهمني لم أعرفه بعد .

ج ـ ما هذا الشيء بالتحديد؟

س ـ يهمني أن أعرف ما هي مسلمات جبر المنطق؟ .

ج ـ لقد أثار اهتمامي أيضا هذا السؤال في وقت ما، وقد سألت عنه أحد الرياضيين، وأنا أذكر أنه أخذ ورقة وقلما وكتب عليها مايلي :

ق ⇐(ك ⇐ ق) .

(ق ⇐ ك) « ق ⇐ (ك ⇐ ل) ⇐ (ق ⇐ل»

ق ⇐ (ك ⇐ ق ٨ ك)

ق ٨ ك ⇐ ق

ق ٨ ك ⇐ ك

ك ⇐ ق ٧ ك

ق ⇐ ق ٧ ك

(ق ⇐ ل) ⇐ (ك ⇐ ل) ⇐ (ق ٧ ك) ⇐ ل)

(ق ⇐ ك) ⇐ (ق ⇐ ~ك) ⇐ ~ق)

ن (ن ق) ⇐ ق

ثم قال : هذه هي المسلمات الأساسية لجبر المنطق، والتي تسمح ببناء أي نظرية فيه، ويوجد إضافة لذلك مسلمات أخرى تتعلق بالجمل المفتوحة وبنظرية الأعداد .

لم يتبق لي بعد هذه المعلومات القيمة سوى أن أشكر هذا الرياضي بشكل يبدو فيه أنني معجب بسهولة هذه المسلمات ووضوحها ودقتها المنطقية .

الجمل المفتوحة :

س ـ لقد ذكرت قبل قليل « الجمل المفتوحة» فما هذه الأشياء الجديدة؟ أنا أعلم

أنه توجد جمل في اللغة، ولكن هل توجد جمل في الرياضيات أيضا؟

ج ـ حسن ـ يبدو أنك مهتم بهذه الجمل المفتوحة وسوف أوضحها لك.

ـ أجبني أولا : هل العبارات التالية قضايا؟.

س ـ تلميذ ممتاز. ع ـ عاصمة دولة اوربية.

ص > ٧ .

س ـ هذه ليست قضايا طالما أننا نعرف من هو الطالب س، ولا نعرف ما هي المدينة ع، ولا نعرف العدد ص لنحكم على صحة العبارة أو على خطئها.

ج ـ صحيح . واضح أنك قد فهمت تماما معنى قضية في الرياضيات.
إن مثل هذه التعبيرات تسمى في الرياضيات «جملا مفتوحة».

والآن أجب على السؤال التالي: هل يمكن للجمل المفتوحة أن تتحول إلى قضايا؟.

س ـ بالتأكيد . إذا بدلنا س ، ع ، ص بقيم محددة فإنها تتحول إلى قضايا. مثلا:
أحمد تلميذ• ممتاز باريس عاصمة دولة في اوربا.
١١ > ٧

هذه قضايا ، وقضايا صحيحة أيضا.

س ـ هل تستطيع إذن أن توضح العلاقة بين القضية والجملة المفتوحة؟.

س ـ نعم . تصبح الجملة المفتوحة قضية عندما يأخذ المجهول فيها قيمة محددة.

ج ـ هذا صحيح . اضف إلى ذلك أن الرياضيين يستخدمون عادة الرمز $\forall$
(ويقرأ : من أجل كل أو لكل . . . .) ليدل فيه على التعميم.
فنحن نكتب مثلا : ($\forall$ س) ق (أي من أجل كل س في ق).

• لكي تكون هذه الجملة قضية فيجب أن يكون هناك معيار لتحديد الطالب الممتاز كالقول بأن معدله مثلا يزيد عن ٩٠٪

(المحرر)

فإذا كانت ق ≡ س > ع فإن: (∀س) ق. يعني (من أجل كل س في المتراجحة(١) (المتباينة)، س > ع).

س - وهل نستخدم الرمز ∀ في مكان آخر.

ج - بالتأكيد . نحن نستعمله بكثرة . مثلا: لنصوغ مفهوم المجموعة الجزئية مستخدمين هذا الرمز نجد:

س ⊆ ع ⟺ (∀ ص) (س ∈ س ⇐ س ∈ ع) هل فهمت كل شيء هنا؟

ج - بالتأكيد . لقد كتبت) (س هي مجموعة جزئية من ع) تكافىء.
(كل س تنتمي إلى المجموعة س هي أيضا عنصر من المجموعة ع)

ج - جيد . والآن لنر كيف نعرف نظرية المجموعات علاقة «يساوي».

س = ع ⟺ (س ⊆ ع) ٧ (ع ⊆ س)
ويمكن أن نكتبها بالشكل:
س = ع ⟺ (∀س) (س ∈ س ⟺ س ∈ ع).

س - هذا شيء ممتع. ومع ذلك فأنا أحمد الله أنه ليس من الضروري أن أحفظ مثل هذا التعريف. أعتقد الآن أنه لم يعد هناك رموز أخرى نتعرف عليها، وإلا فإننا سوف ننسى الكلمات الحية نفسها إذا كنا سنستخدم الرموز فقط ورمزنا كل شيء.

ج - حقيقة توجد رموز أخرى لم نتعرف عليها بعد. مثلا هناك رمز المكمم (يوجد على الأقل) ونرمز له بـ∃.

س - ما هذا الرمز الغريب أيضا ؟

ج - لا يوجد هناك أي غرابة. فهذا الرمز يعني «يوجد واحد على الأقل». وهذا الرمز هو خيال أو صورة (بالمرآة) للحرف الأجنبي E، اترى أي أفكار تدور

---

(١) تستعمل (المتباينة) في أكثر الأقطار العربية إلا أن البعض يستعمل المتراجحة.
(المحرر)

في رأس الرياضي وتخرج منه ليبتكر لنا رموزا جديدة؟ *

إذا كانت ق ـ جملة مفتوحة فإن (∃ س) . ق هي ب قضية تقرأ «يوجد على الأقل عنصر واحد س بحيث إن ق محققة» *

س ـ لم أكن أتصور أنه يوجد رمز له هذا المعنى .

ج ـ بالتأكيد . وإليك الآن بعض الأمثلة على استخدام هذا الرمز:

إذا كانت س ، ع عناصر من مجموعة الأعداد الطبيعية اي أن :

س ، ع ∈ ط ، وإذا كانت ق جملة مفتوحة معرفة كما يلي :

ق (س ، ع) ≡ س > ع فإن التعبير:

(∃ س) ق (س ، ع) تعني :

« يوجد عدد واحد س على الأقل بحيث إن س > ع » .

أما التعبير : (∀ س) ق (∃ ع) (س ، ع) فتعني :

« من أجل كل عدد س يوجد على الأقل عدد واحد ع بحيث إن س > ع » .

هل ترى أي متعة حقيقية يمنحنا إياها استخدام هذا الرمز؟

لنأخذ حقيقة أخرى :

من أجل أي عددين طبيعيين ب ، جـ يوجد عدد د يحقق الخاصة ب + جـ = د

وإذا استخدمنا رموز المنطق الرياضي فإننا نكتب العبارة بالشكل :

(∀ ب ، جـ ∈ ط) (∃ د ∈ ط) / ب + جـ = د

وهناك أمثلة كثيرة مثلا . . .

س ـ أشكرك . . . هذا يكفي ولا داعي لأمثلة أخرى . لقد امتلأ رأسي بهذا المكه . . .

ج ـ تقصد المكمم . . مكمم الوجود .

س ـ نعم . بالضبط : المكمم . . . مكمم الوجود .

---

* نرمز لحكم الوجود في كتبنا المدرسية بـ E (المترجم)

* إن (∃ س) ق قضية لأنه يمكن الحكم على صحتها أو خطئها ، وكذلك فإن (∀ س) ق قضية . (المحرر)

ج ـ أنا أفهم أنك قد تعبت من كل هذه الرموز والتعاريف والقواعد والجداول، ولكن يجب عليك ألا تخاف منها، وإذا ظهرت أي ضرورة لاستخدامها فسوف تستوعبها بالتدريج، وعندما تريد أن تلهو بعض الشيء فإنك تستطيع أن تجرب استخراج أحد جداول الحقيقة لمختلف العبارات. أو تحاول أن تنقل أي قضية كلامية إلى لغة ورموز المنطق.

س ـ ما الحد الأدنى من الرموز الذي يجب علي أن أعرفه في كل الأحوال؟

ج ـ أعتقد أنه من الأفضل أن تحفظ ـ على الأقل ـ الرموز الأساسية. ومن الممكن ان تحفظ فقط امكانية استخدامها ومعناها.

س ـ وما هذه الرموز؟

ج ـ هذه الرموز هي :

ص	رمز صحة القضية.
خ	رمز خطأ القضية.
∧ أي س ∧ ع	رمز لعملية الربط بـ و.
∨ أي س ∨ ع	رمز لعملية الربط بـ أو.
⇐ أي س ⇐ ع	رمز الاقتضاء (إذا كانت س صحيحة فإن ع صحيحة)
⇔ أي س ⇔ ع	رمز التكافؤ.
~ أي ~ س	رمز النفي.
∀ أي (∀ س) ق	مكمم التعميم : من أجل أي س تتحقق ق.
∃ أي (∃ س) ق	مكمم الوجود: يوجد عنصر على الأقل بحيث تتحقق ق.

أعتقد أن هذا يكفي كبداية لتعلم رموز المنطق. . .

الفصل الرابع
بضع كلمات حول الرياضيات

هل من السهل اعطاء مسألة رياضية؟

أنا أعلم أنك سوف تجيبني: نعم فانا أستطيع اعطاء مسألة رياضية ولكن المشكلة هي كيفية حل هذه المسألة، فأنت تجيب دوما بهذا الشكل عندما يوجه إليك المدرس مثل هذا السؤال. ولكن هذا غير صحيح.

س ـ ولماذا؟ وهل هناك صعوبة في اعطاء مسألة رياضية؟.

ج ـ لا بأس. سوف اعرض عليك بضعة أمثلة، وسوف ترى أن اعطاء مسألة رياضية ليس بهذه السهولة التي تتصورها، وسوف تدرك أنك قد تجد نفسك في موقف سخيف جداً فيما إذا أعطيت مسألة رياضية بدون تفكير (وبشكل ارتجالي)، وبدون أن تجرب حلها قبل اعطائها. سوف أطرح عليك أولاً عشر مسائل سهلة، وعليك أن تحلها فورا، وبعد ذلك سوف نناقش بالتفصيل كل مسألة وحلها. لنبدأ مرة أخرى من المجموعات. المسألة الأولى: لدينا مجموعتان: سـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ع = {١، ٣، ٥}
والسؤال هو: أي المجموعتين أكبر؟.

س ـ لا يحتاج السؤال إلى أي تفكير. واضح أن سـ اكبر من ع.

ج ـ لننتقل إلى المسألة الثانية.

المجموعات س، ع، ص، ق، ك معطاة كما يلي

س	مجموعة الكتب الجيدة.
ع	مجموعة الأطفال الأذكياء.
ص	مجموعة المدن الكبيرة.
ق	مجموعة الأشخاص البدينين.
ك	مجموعة النساء اللواتي يرتدين ملابس جميلة.

فهل هذه المجموعات معطاة بشكل جيد؟ .

س ـ أعتقد أنها معطاة بشكل جيد. ولماذا تكون معطاة بشكل سيء؟ .

ج ـ أجب الآن على المسألة الثالثة:

إذا كان ثمن دفتر خمس ليرات. فكم يجب أن ندفع ثمن ثلاثة دفاتر؟ .

س ـ بإمكان اي طفل أن يجيبك على هذا السؤال. واضح أن ثمن ثلاثة دفاتر سيكون خمس عشرة ليرة.

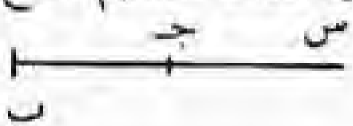
ج ـ سؤال رابع: إذا وزعنا مجموعة طلاب مؤلفة من ستة عشر طالباً إلى أربع زمر، فكم طالباً يكون في كل زمرة؟

س ـ كل زمرة تتألف من أربعة طلاب.

ج ـ والآن. المسألة الخامسة: لديك أربعة كتب وحقيبتان. بكم طريقة يمكن أن تضع هذه الكتب في الحقيبتين؟ .

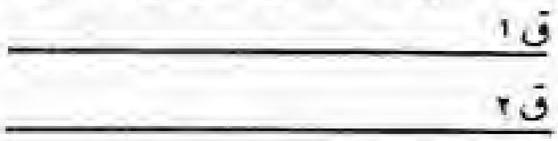
س ـ ثماني طرائق.

ج ـ لننتقل الآن إلى الهندسة والمسألة السادسة: لدينا نصف مستقيم شعاع ب س وضعنا عليه نقطة جـ فأي المستقيمين أكبر: ب س أم جـ س



س ـ سؤالك غريب جدا. ليس هناك ادنى شك في ان ب س أكبر من جـ س.

ج ـ المسألة السابقة: ما مساحة السطح المحصور بين مستقيمين متوازيين؟ .



س ـ يمكن أن نجد المساحة بضرب طول المستقيم بالبعد بين المستقيمين، إذن كان يجب عليك أن تعطيني البعد بين المستقيمين.

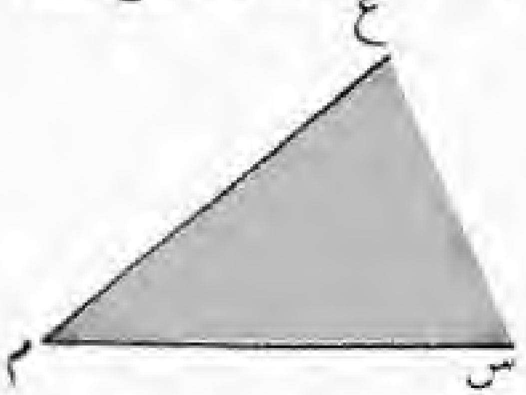
س ـ حس. هل تستطيع ان تقول لي الآن (مسألة ثامنة) اي المساحتين أكبر

مساحة السطح سط١ الواقع بين المستقيمين

أم مساحة السطح سط٢ الواقع خارج ق١ ____________

المستقيمين ق٢ ____________

س - ان مساحة سطح سط٢ أكبر- بالتأكيد من مساحة السطح سط١.



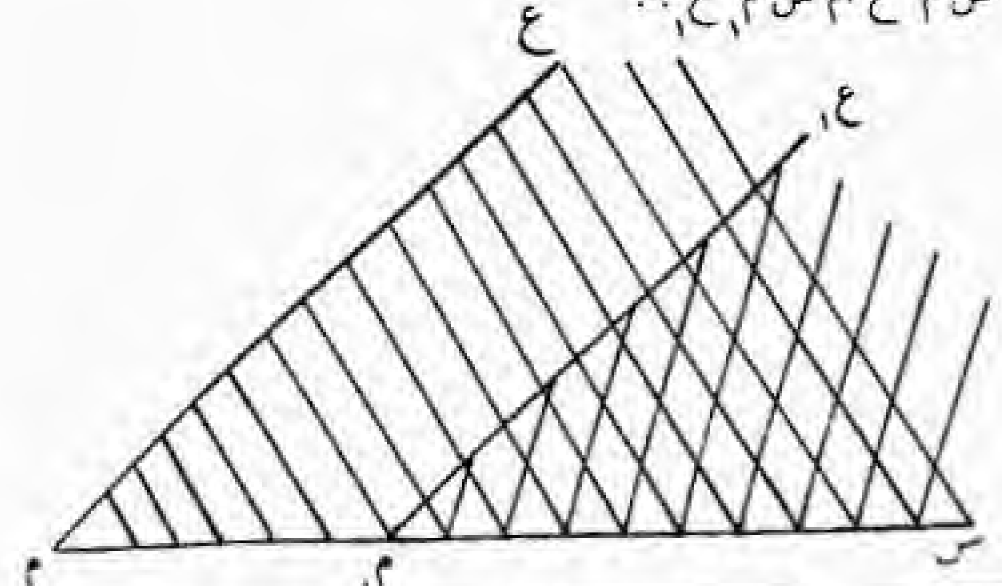
ج - والمسألة التاسعة عن الزوايا:

لنفترض أن الزاوية تتشكل بدوران نصف مستقيم حول نقطة مفروضة، فالزاوية نفهم منها السطح المحصور بين نصفي المستقيمين $\overrightarrow{\text{م س}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ع}}$ (ضلعي الزاوية)• والمظلل في الشكل.

والآن قل لي:

أي الزاويتين اكبر (في الشكل المجاور)

س مˆ ع أم س مˆ١ ع١؟.



• لا يتفق تعريف الزاوية هنا مع التعريف المألوف لدينا وهو اتحاد الشعاعين م س ، م ع ، وما يعرّفه المؤلف هنا يقابل ما نسميه المنطقة الزاوية.

[المحرر]

س ـ لاجدال في ان الزاوية س م̂ ع أكبر من الزاوية س م̂١ ع١ بذلك الجزء من المستوى المحصور بين نصفي المستقيمين م ع، م١ ع١ .

ج ـ المسألة العاشرة:

إذا قفز مظلي من الطائرة فهل يهبط إلى الأرض وفق الخط العمودي النازل من الطائرة إلى السطح الأرض؟

س ـ وهل يمكن أن يسقط بشكل آخر؟

ج ـ السؤال الحادي عشر: هل الرفع إلى القوة الثانية (أي ع= س٢)[1] تابع تطبيق متباين. أي: هل ع=س٢ تتحقق فيه العلاقة:

س١ ≠ س٢ ⟸ تا(س١) ≠ تا(س١)؟.

س ـ طبعا. ذلك أننا نعرف أن ٢^٢ = ٤، ٣^٢ = ٩، ٦^٢ = ٣٦ . . . أي أن العناصر المختلفة من المنطلق {٢، ٣، ٦، . . .} يقابلها قيم مختلفة في المستقر {٤، ٩، ٣٦، . . .}

(١) تطبيق أكثر استعمالا من تابع.

[المحـــرر]

ج ـ والآن ، وبعد أن «أجبت» وأعطيت حلولا لجميع المسائل التي طرحتها عليك . أستطيع أن أقول لك إنك لم تعط أي إجابة صحيحة . إضافة لذلك، فإن معظم المسائل لم تكن معطاة بشكل جيد .

س ـ هذا غير ممكن . المسائل كانت واضحة جدا وبسيطة جدا .

ج ـ نعم . هي واضحة وبسيطة جدا ولكن فقط لأولئك الذين لا يعرفون رياضيات، أو الذين يعرفونها معرفة سطحية .

لنناقش المسائل والحلول بالترتيب :

في المسألة الأولى كان السؤال : أي المجموعتين أكبر س أم ع؟ الخطأ في هذا السؤال هو أن المقارنة بين المجموعات لاتتم باستخدام «أكبر» أو «أصغر» (أي لا تستخدم > أو <) لذلك فلا يصح أن نسأل أبدا حول المجموعات الكبيرة والصغيرة . إن علاقة «أكبر» أو «أصغر» ممكنة فقط بين الأعداد ولمقارنة المجموعات نستخدم علاقة الاحتواء ($\subseteq$ و $\supseteq$) وفي مثالنا يمكن أن نقول إذ ع $\supseteq$ س . وهكذا، فإذا سألك أحدهم «أي المجموعتين أكبر»؟ تستطيع ان تتأكد مباشرة أن السائل لا يعرف أي شيء عن المجموعات .

في المسألة الثانية :

المجموعات كلها معطاة بشكل غير صحيح ، ذلك أن : الكبير والجميل والذكي والبدين . . . ليست صفات نستطيع أن نعرف بواسطتها وبالتأكيد ما إذا كان عنصر ما ينتمي لهذه المجموعات أو لا ينتمي .

س ـ حسن . ولكني أعتقد أن المسألة الثالثة ـ عن ثمن ثلاثة دفاتر كان حلها صحيحا .

ج ـ هذه المسألة ، والمسألة الرابعة أيضا ، معطاة بشكل غير دقيق وغير صحيح يكفي أن تنظر في حقيبة أحد الطلاب لتجد هناك مختلف الدفاتر، منها ما

يكون ثمنه خمس ليرات ومنها ما يكون سعر الدفتر أربع ليرات.

س - هذا صحيح . وفي المسألة لا يوجد ما يشير إلى أن الدفاتر المشتراة متماثلة وسعر الدفتر منها يساوي خمس ليرات. لقد أصبح مفهوما الآن أن توزيع ستة عشر طالبا إلى أربع زمر قد يتم بمختلف الطرائق. المهم فقط هو أن يكون مجموع الطلاب في الزمر الأربع هو ستة عشر طالبا.

ج - هذا صحيح. وكما ترى يجب أن تكون منتبها جدا ودقيقا جدا في اعطاء مسألة رياضية. فإذا أجابك أحدهم -مثلا- إن ثمن ثلاثة دفاتر ثلاث وعشرون ليرة، أو إنه في إحدى الزمر يوجد خمسة طلاب، وفي الزمرة الثانية يوجد ثلاثة طلاب، وفي الزمرة الثالثة والرابعة أربعة طلاب، فلا تستطيع أن تقول: إن إجاباتهم ليست دقيقة.

س - وما العيب في المسألة الخامسة؟

ج - المسألة الخامسة معطاة بشكل جيد وصحيح. ولكنها أصعب بكثير مما تصورت. فكل رياضي يستطيع أن يجيبك/ : أن وضع أربعة كتب في حقيبتين يتم بست عشرة طريقة، ولنستعرض منها هذه الطرائق: لنرمز للكتب بالأحرف ب، ج، د، هـ، وللحقائب س، ع.

١ - يمكن أن نضع في الحقيبة س كتابا واحدا (والثلاثة الباقية في الحقيبة ع)، فنضع إما الكتاب ب أو جـ أو د أو هـ. إذن هناك أربع طرائق لوضع كتاب واحد في الحقيبة س

٢ - يمكن أن نضع في الحقيبة س كتابين فنضع: ب وجـ، أو جـ ود، أو د وهـ، أو ب ود، أو ب وهـ، أوج وهـ فهناك ست طرائق لوضع كتابين في الحقيبة س (وكتابين في الحقيبة ع).

٣ - يمكن أن نضع في الحقيبة س ثلاثة كتب هي: ب، هـ، د، أو ب، ج، هـ، أو جـ،د، هـ، أو ب، جـ،د فهناك أربع طرائق لوضع ثلاثة كتب في الحقيبة س (وكتاب واحد في الحقيبة ع).

إذن فقد وجدنا ٤+٦+٤=١٤ طريقة. ويمكن أن نضع الكتب الأربعة في الحقيبة س أو في الحقيبة ع.

إذن هنا لدينا أيضا طريقتان، ويصبح مجموع الطرائق ١٤+٢=١٦ طريقة لوضع الكتب الأربعة في الحقيبتين.

س - حسنا. وما هو الخطأ في إجابتي على المسألة السادسة حول أنصاف المستقيمات؟.

ج - السؤال هنا غير صحيح: تماماً كما كان عليه الأمر في المسألة الأولى حول المجموعات. فعلاقة أكبر غير معرفة على مجموعات نقاط مستقيم. ولذلك فلا معنى لهذا السؤال، والمسألة حول المساحات أيضا لامعنى لها... (المسألة السابعة والثامنة).

س - ولماذا؟

ج - ذلك أننا نتحدث عن مساحة السطح من أجل الأشكال الهندسية المحدودة فقط. إذ أننا لا نسأل أبدا عن «مساحة القبة السماوية»؟

س - ولكن. أليست مساحة سطح سط٢ أكبر من مسلحة سط١؟

ج - هل تظن إجابتك صحيحة؟ حسن. إذا استطعت أن تبرهن لي أن الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... أكبر من الأعداد ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ... فسوف أوافق معك على أن سط٢ > سط١!!

س - ولكني لا أستطيع أن أبرهن على أن العلاقة أكبر من أجل مجموعات الأعداد!!

ج - في هذه الحالة سوف تتابع معي مناقشة بقية المسائل.

س - لقد تأكدت الآن أن السؤال حول الزوايا لا معنى له أيضا.

ذلك أنه إذا كانت الزاوية جزءا من المستوى، فلا يمكن أن نحدد مقدارها، ولا نستطيع مقارنة الزوايا بعلاقة أكبر (تماماً مثل المسألة حول المجموعات).

ج - هذا صحيح، فالزوايا يمكن مقارنتها فقط بعد أن نتعرف على قياس الزاوية.

فنحن نستطيع أن نقول إن الزاوية التي قياسها ٥٥° أكبر من الزاوية التي قياسها ٤٥°، ذلك أننا أدخلنا هنا قياس الزوايا، ونحن نعرف أن ٥٥ > ٤٥ . والعلاقة > يمكن استخدامها من أجل مقارنة الأعداد.

س ـ وماذا عن سقوط المظلي؟ ألا يسقط بشكل عمودي؟

ج ـ لا بالتأكيد. لقد تعرفنا في الفيزياء ، بشكل كامل على مثل هذه المسائل، وعرفنا أن سقوط المظلي يتم وفق مسار معقد جدا. هذا المسار ـ في الحالة المثالية ـ يوافق قوسا من قطع مكافىء.

س ـ ولكن : لماذا ع = س٢ ليس تابعا تطبيقا متباينا؟

ج ـ أنا لم أقل إن هذا التابع غير متباين ولم أقل إنه متباين. فمن الممكن أن تكون الإجابة على هذا السؤال بالنفي ، أو بالايجاب. فالسؤال هنا معطى بشكل غير صحيح ، ذلك أنه لم يذكر في السؤال مجموعة تعريف التابع.

فإذا كانت مجموعة تعريف التابع هي ط وكان التابع ع = س٢ تا : ص ← ط فإن هذا التابع سيكون متباينا.

أما إذا كانت مجموعة تعريف التابع هي ص فإن ع = س٢ ليس متباينا. فهو تابع من ص إلى ص+ وكل قيمتين مختلفتين من ص قد توافقها نفس القيم للتابع في ص+.

مثلا : ٢ ، − ٢ ∋ ص بينما تا (٢) = ٤ و تا (−٢) = ٤ أي س١ ≠ س٢

ولكن تا (س١) = تا (س٢) (في هذا المثال).

إذن فهذا السؤال غير دقيق ، ذلك أن الإجابة متوقفة على مجموعة تعريف هذا التابع.

س ـ هذا صحيح. معك حق، إن اعطاء المسائل الرياضية ليس بسيطا إلى هذه الدرجة التي تصورتها.

ج ـ نعم إضافة لذلك فإنك تستطيع أن تحدد من شكل المسألة الموضوعة ـ ما إذا كان واضعها يعرف الرياضيات بشكل جيد أو لا يعرف الرياضيات.

ماذا تدرس الرياضيات في وقتنا الحاضر؟

بدل الإجابة على هذا السؤال سوف أسألك «لماذا لا تدرس الرياضيات»؟ لإنه لا يوجد في وقتنا الحاضر أي مجال ـ تقريباً ـ للمعارف الإنسانية لم تدخل به الرياضيات، ولكي تتحقق من صحة كلامي، يكفي ان نعدد أهم أقسام الرياضيات في وقتنا الحاضر، تلك الأقسام التي أصبحت مادة تشغل الرياضين في جميع الاختصاصات. إليك بعض هذه الأقسام.

* المنطق وأساس الرياضيات.
* نظرية المجموعات.
* نظرية الأعداد.
* النظرية الجبرية للأعداد ونظريات الحقول.
* الحلقات التجميعية والجبر.
* الحلقات التوزيعية والجبر.
* الهندسة التحليلية.
* التحويلات الهندسية.
* نظرية الزمر.
* الزمر التبولوجية وزمرة «لاي : Lie».
* التوابع الحقيقية.
* نظرية القياس.
* التوابع العقدية.
* نظرية القدرة.
* التوابع الخاصة.
* معادلات تفاضلية.
* معادلات تفاضلية جزئية.
* تحويلات فوربية.
* عمليات التكامل.

* التحليل التابعي.
* طرائق العد (أنظمة العد).
* المتباينات الهندسية.
* الهندسة التفاضلية.
* التبولوجيا العامة.
* نظرية الاحتمالات.
* نظريات التنبؤ.
* . . . (وهل هذه رياضيات؟).

س ـ لقد اكتفيت. ولكن من أين جاءت هذه الأسماء الكثيرة؟ وهل جميع هذه «الأشياء» قد دخلت الرياضيات؟ لن أستطيع أن أحفظ اسماءهما (فقط). لقد كنت أعتقد أن الرياضيات حساب وهندسة وهذه المجموعات التي ظهرت في السنوات الأخيرة.

ج ـ نعم هذا ما يعتقده الكثيرون. ولكن هذا الاعتقاد صحيح فقط بالنسبة للرياضيات التي كانت معروفة منذ ٥٠٠ إلى ٦٠٠ عام.

ج ـ لقد ظهرت هذه الأقسام في أوقات مختلفة. فبعضها «يبلغ من العمر» ٣٠ سنة، وبعضها ٥٠ سنة، وبعضها ١٠٠ سنة. أما البقية فأقدم بكثير.

س ـ وهل ينبغي على كل إنسان يريد أن يصبح «عالم رياضيات» أن يدرس أولا جميع هذه المواد؟

ج ـ ومن قال لك ذلك؟ هذا غير ممكن بالطبع وغير ضروري، ولو كان الأمر كذلك لأصبحت مجموعة الرياضيين ـ على الأغلب ـ مجموعة فارغة. إن كل رياضي يعمل في مجال معين وبعض المجالات الأخرى القريبة منه، أما عن بقية المجالات فهو يعرف الشيء القليل. . . . وغالبا مايحدث عند لقاء رياضيين (من العصر الحديث) مختصين بمجالات بعيدة عن بعضها، بحيث إن لكل منها «لغته» الخاصة، وغالبا مايحدث أنهم بعد بضع دقائق من

المحادثا لايبقى لديهم اي شيء يتحدثون فيه، وهذا لن يحدث بالطبع فيما لو بدؤوا بالحديث حول المفاهيم الأساسية في الرياضيات، هذا إذا لم يبدأ احدهم بجر الموضوع إلى مجال اختصاصه ليتحدث «بلغته» و. . .

س ـ الا يوجد ـ مع ذلك ـ مايجمع الرياضيات المعاصرة في جميع مجالاتها؟

ج ـ الرياضيون يؤكدون على أنه في جميع مجالات الرياضيات المعاصرة يمكن ان تجد: المنطق، المجموعات والبنى، وهناك آخرون يعتقدون (إذا لم يغيروا رأيهم بعد!) أنه بالإمكان اشتقاق الرياضيات المعاصرة من نظرية المجموعات، وذلك بتوفر مناقشة منطقية دقيقة جدا.

مثلا: الجبر الحديث يدرس تلك المجموعات المعرف عليها عملية أو علاقة واحدة ـ على الأقل ـ أي مجموعات لها بنية، لاتتعلق بنوع العناصر الموجودة فيها. والمسألة الأساسية هنا ـ في الجبر الحديث ـ تتلخص في البحث عن البنى وخواص العمليات في البنى. ولنلاحظ هنا أنه يمكن أن تجد مجموعتين مختلفتين ولهما عناصر مختلفة تماما، ويكون لهما نفس البنية فيما إذا كان مطبقا عليهما نفس العملية ـ أو نفس قانون التشكيل الداخلي ـ ووظيفة الجبر الحديث تتلخص في كشف البنى المتماثلة للمجموعات ذات العناصر المختلفة.

إن الكشف عن شيء عام (أو شيء مشترك بين المجموعات) عند وجود اختلاف ظاهري فيما بينها (اختلاف المجموعات واختلاف قانون التشكيل المطبق عليها) هو احد أهم وظائف الجبر الحديث. وإذا اعتبرت البحث عن هذا (الشيء العام) كلعبة فإن استراتيجية اللعب تحددها المفاهيم الأساسية للمنطق الصوري ونظرية المجموعات. أما قواعد اللعبة فهي العمليات الجبرية وخواص البنى. وأما ساحة اللعب فهي بنى جبرية محددة. ولهذا السبب نعطى اهمية كبيرة لدراسة مختلف البنى الموجودة أمام الرياضيين في وقتنا الحاضر.

س - لقد تحدثنا عن أشياء كثيرة مختلفة، ولكننا لم نتحدث أبدا عن الهندسة وأليست الهندسة أوسع مجالا في الرياضيات؟

ج - أنت على حق. فالهندسة مهمة جدا، إضافة إلى أنها مجال قديم جدا من مجالات الرياضيات. فبداية الهندسة نجدها في مصر القديمة. حيث تطورت في ذلك الوقت بشكل عاصف بسبب ضرورتها لقياس الأراضي المزروعة، ونحن لم نتحدث عنها لأننا - وببساطة - لم نجد الوقت لذلك، فقد نتحدث عنها في وقت آخر حتى لايعاتبنا أحد لأننا لم نذكرها أبدا. أجبني على السؤال التالي:

ما الهندسة؟

س - الهندسة... الهندسة... هي علم....

ج - لاتتعب نفسك فهذا يكفي. أعلم أنك تعرف ماذا تدرس الهندسة. ولكني سوف أعطيك فقط تعريفا للهندسة ذلك التعريف الذي أعجب الرياضي العظيم فيلكس كلاين (ألماني - ١٨٤٩ - ١٩٢٥ -)

يقول التعريف:

الهندسة هي ذلك المجال من الرياضيات الذي يقول أهل الرأي إنها قد سميت بهذا الاسم لأسباب عاطفية وتقليدية!

س - أنا أيضا أعجبني هذا التعريف.

ج - كنت أعلم أنك ستعجب به. ومع ذلك فلا يمكن اعتباره - بشكل عام - تعريفا مازحا للهندسة، ذلك أنه يعكس حقيقة عميقة عنها. وسوف تفهم ذلك تماماعندما تتعرف عن قرب على مختلف مجالات الرياضيات.

الرياضي الذي لايهرم:

س - وكيف أفهم هذا العنوان؟ هل اكتشف الرياضيون واكسير الشباب؟ هذا مضحك. كيف يمكن للرياضي ألا يهرم؟

ج - إنهم لم يكتشفوا «اكسير» الشباب. ومع ذلك فإن هذا الرياضي الشاب دائما- بالعمر والفكر - موجود فعلا.

س - هذا خبر شيق جدا. ماهذا الرياضي ومن هو؟ وابن يعيش؟ وكيف تمكن من الحفاظ على شباب دائم؟

ج - الإجابة على كل هذه الأسئلة بسيطة جدا. ولكن دعني أولا أقص عليك كيف ظهرت فكرة «بناء» هذا الرياضي الذي لايهرم.

من المعروف أن الإنسان يكتسب ويزداد خبرة وتجربة بمرور الأيام. وهذه حالة ايجابية بصورة عامة. ولكننا نلاحظ أن التجارب المجمعة والخبرات المكتسبة تحول أحيانا دون فهم الإنسان لموضوعات أو مفاهيم أو تجارب جديدة بسبب صعوبة التكيف معها. وهذه حالة سلبية تؤدي إلى التقليل من قدراته على الابتكار والابداع.

س - نعم. فأناأعلم جيدا ما الفرق بيني وبين الكبار...

ج - أنا لاأتحدث عنك. لقد فكر الرياضيون في هذه المشكلة، وتوصلوا إلى النتيجة التالية: بهدف السعي لتطور أكبر للعلوم الرياضية بصورة عامة، لاضرر من ايجاد رياضي يتميز بامتلاكه معارف رياضية عالية، وذي خبرةوتجارب كثيرة ويبقى -مع ذلك- شابا إلى الأبد لكي يتمكن باستمرار وبسهولة من استيعاب الجديد في عالم الرياضيات ولديه القدرة على العطاء الابداعي باستمرار. ولقد صنع الرياضيون بأنفسهم هذا الرياضي.

س - وكيف صنعوه؟

ج - صنعوه بالشكل التالي: اتفق جماعة من الرياضيين الفرنسيين الشباب على أن يكتبوا وينشروا أبحاثهم الرياضية تحت اسم مستعار: «نيقولا بورباك» (Bourbaki N.).

س - وهل هذا هو الرياضي العالم والذي لايهرم؟ ولكني لم أفهم لماذا لايهرم؟ ذلك

أن مجموعة الرياضيين الشباب سوف تهرم مع الزمن وتصبح في وقت ما. . . . «رياضيين عجائز»

ج ـ هذا صحيح. ولكنهم تمكنوا من التغلب على هذه المشكلة بطريقة مبتكرة جدا. فما أن يبلغ أحد أعضاء المجموعة عمرا معينا حتى ينتخبوا بدلا منه رياضيا شابا جديدا. وهكذا يبقى العمر الوسطي للجماعة هو نفسه باستمرار. أي أن نيقولا بورباك لايهرم.

س ـ هذا حل ممتع فعلا. ولكني أتساءل: كيف يكتبون معا أبحاثهم القيمة؟

ج ـ لاأحد يعرف تماما كيف تظهر أعمالهم المشتركة. ولكنهم يتعاونون ـ على الأرجح ـ على الشكل التالي: عندما يكلف أحدهم بكتابة شيء ما، أو البحث في موضوع معين، فإنه يكتبه ثم يوزعه على بقية أعضاء الجماعة، وبعد دراسته يجتمعون جميعا ليعرض كل منهم رأيه، وليبحثوا معا الأخطاء ويصححوها وينتقدوا ويقوموا هذا العمل. .

س ـ . . . . وذلك تماما كما يفعل مدرسونا معنا عند الامتحان. . .

ج ـ ربما كان التشبيه صحيحا ولكن «الامتحان» هنا أصعب بكثير، وعندما يدرس هذا النص أو البحث وتعاد كتابته بشكل صحيح، ينشر تحت اسم: نيقولا بورباكي.

س ـ ولماذا لايكتبون كتبنا المدرسية بهذا الشكل؟

ج ـ لاتسأل أسئلة تافهة!!

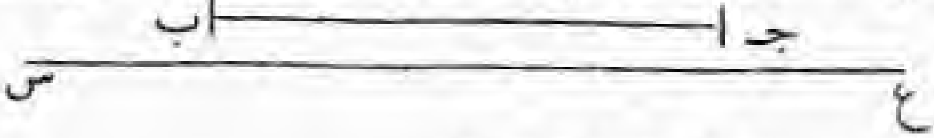
أين توجد نقاط أكثر: على المستقيم، أم على القطعة المستقيمة؟

ج ـ ألا توافق معي أن هذا السؤال غريب إلى حد ما؟

س ـ سؤال مضحك وليس غريبا.

ج ـ ولماذا هو سؤال مضحك؟

س ـ لأنه يكفي أن تنظر إلى الرسم أو تتصور لنفسك مستقيما $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ وقطعة



مستقيمة ب جـ، لتعطي جوابا واضحا:

يوجد نقاط على المستقيم اكثر بكثير مما هو على القطعة المستقيمة، ولايلزمك لذلك أي معرفة سابقة بالرياضيات.

ج ـ هل أنت واثق من صحة إجابتك؟ وكيف تستطيع اثباتها؟

س ـ وماذا أثبت في إجابتي؟ إن كل شيء واضح. فالقطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم محدود بنقطتين، إذن كل نقاط القطعة المستقيمة هي (في نفس الوقت) نقاط من المستقيم، ثم إنه يوجد على المستقيم نقاط أخرى كثيرة غيرها. من هنا نستنتج أن نقاط المستقيم أكثر بكثير من نقاط القطعة المستقيمة. وأنا متأكد من صحة إجابتي. قد أكون ضعيفا في مادة الرياضيات ولكن نظري جيد وعيني لاتخدعاني؟

ج ـ لنفترض أن «نظرك» جيد. ومع ذلك تعال لنتذكر معا: كيف يمكن ان نبرهن أن مجموعتين لهما نفس العدد من العناصر؟

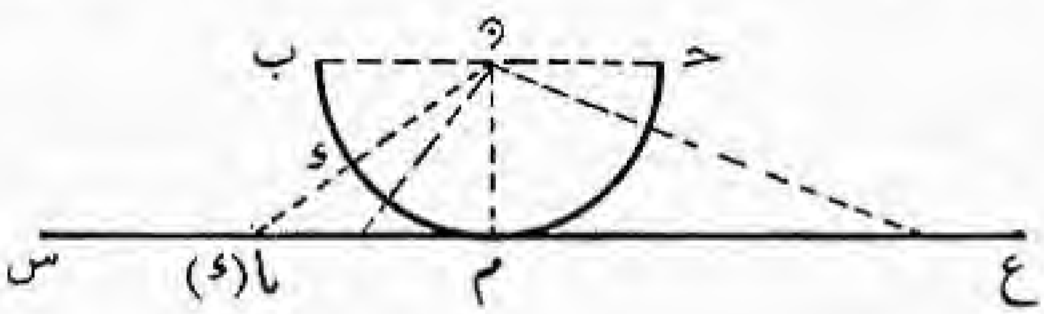
س ـ يمكن أن نبرهن أن لمجموعتين نفس العدد من العناصر إذا أمكن ايجاد تقابل بينهما. أما إذا وجدنا تطبيق تقابل من إحدى المجموعتين إلى مجموعة جزئية من المجموعة الثانية عندئذ تكون المجموعة الثانية ذات عناصر أكثر من المجموعة الأولى. أنا لم انس ذلك.

ج ـ انا سعيد جدا لانك ماتزال تذكر هذه الخاصة الهامة. غير اننا قبل ان نجيب على السؤال الذي طرحناه في بداية المحادثة، لابد لنا ـ ولإراحة ضميرنا فقط ـ من أن نحاول تطبيق هذه النظرية على مجموعة نقاط القطعة المستقيمة ومجموعة نقاط المستقيم. أي لنحاول البحث عن تطبيق ـ تقابل ـ فيما بينهما.

س ـ إذا كنت مصرا، أستطيع موافقتك (وإن كنت متأكدا من أنك تضيع الوقت

سدى) كيف نجد هذا التطبيق - التقابل؟

ج - يمكن ايجاد هذا التطبيق وتنفيذه بكل بساطة، وسوف نستخدم لذلك طريقة هندسية. لنتصور أننا «ثنينا» القطعة المستقيمة ب جـ وشكلنا منها نصف دائرة (نعتبر أن القطعة المستقيمة ب جـ هي خيط). أما المستقيم س ع.



فنجعله مماسا لنصف الدائرة بالنقطة م. يمكن أن نجد تقابلا بين نقاط نصف الدائرة ونقاط المستقيم بالشكل التالي: إذا كانت د نقطة من نصف الدائرة التي مركزها ن فإن المستقيم ن د يقطع المستقيم س ع في نقطة معينة، نرمز لهذه النقطة بـ ما(د) مادامت تتعلق بالنقطة د.

إذن النقطة د من نصف الدائرة تقابلها النقطة ما(د) من المستقيم س ع. إذا تحولت النقطة د على القوس م د ب، فإنها سوف «تجر» معها النقطة ما (د) على نصف المستقيم م س. وإذا أخذنا النقطة د على القوس م جـ فإن حركة النقطة على هذا القوس سوف تجعل (د) تتحرك على نصف المستقيم م ع.

وبهذا الشكل أوجدنا تقابلا بين نقاط نصف الدائرة (التي حصلنا عليها من ثني القطعة المستقيمة ب جـ) ونقاط المستقيم س ع. استنادا إلى هذا التقابل نصل إلى أن. . . .

س - أمر مدهش حقا. ينتج من هذا أن القطعة المستقيمة فيها نقاط بقدر نقاط المستقيم. إن هذا شبيه «بالسحر».

ج ـ هذا ليس سحرا، وإنما برهان يوضح ويؤكد ضرورة عدم الاعتماد كليا على النظر، ولهذا السبب بالذات فإن الرياضيات لاتأخذ بعين الاعتبار «الصور والملاحظة» كبرهان على نظرية معينة. ويجب أن نعترف أنهم على حق، فالرسوم قد تكون مفيدة أحيانا وموضحة، ولكنها تقود ـ في أحيان أخرى ـ إلى طريق خاطىء.

س ـ سوف أحفظ هذا جيدا لكي لاأخدع نفسي بعد ذلك.ولكن هناك شيئا آخر يشغلني حول المستقيم.

ج ـ وما هذا الشيء بالتحديد؟

س ـ ماعدد النقاط الموجودة على المستقيم؟

ج ـ هم. م. هم. . ، صدقني: إن سؤالك هذا ليس بسيطا (يجب أن أنهي الحديث معه بسرعة، وإلا فسوف أجد نفسي في مأزق إذا لم يتوقف محدثي عن طرح الأسئلة) يجب الاعتراف بأنني لم أحص عدد النقاط على المستقيم أبدا، ولكن تعال لنصدق الرياضيين الذين يؤكدون «أنه يوجد على المستقيم نقاط بقدر الأعداد الحقيقية». (من يدري؟ ربما قام أحدهم بعد هذه النقاط). ونرمز لعدد النقاط على مستقيم الأعداد، أو عدد الأعداد الحقيقية بالحرف C «الذي هو الحرف الأول من الكلمة اللاتينية Continuo وتعني مستمر» وإذا رمزنا لمجموعة الأعداد الحقيقية بـ ح فإن رئيس المجموعة ح هو C أي: ر (ح) = C

وفي عام ١٨٧٣ برهن كانتور (في رسالته التي كتبها لصديقه ديديكند، والتي ذكرناها في بداية هذا الكتاب) أن رئيس مجموعة الأعداد الحقيقية أكبر من رئيس مجموعة الأعداد الطبيعية أي أن ر(ح) > ر(ط)، أو أن C > ℵ. وبذلك توصل كانتور إلى أنه لايمكن عد نقاط المستقيم، ولايمكن عد الأعداد الحقيقية لأنه لايمكن أن نضعها في تقابل مع مجموعة الأعداد الطبيعية، وأنه لايوجد تقابل بين نقاط المستقيم وبين مجموعة الأعداد

الطبيعية إذن C > ر (ط). وهذه النتيجة أصبحت، في الوقت نفسه، بداية لظهور نظرية المجموعات، وباستطاعتنا أن ننهي حديثنا عند هذا الحد.

غير أنني أستطيع أن أضيف أن هذا المثال الأخير يشير إلى أن نظرية المجموعات ضرورية ولابديل لها لدى تشكيل تطبيقات ثنائية للمقادير اللانهائية. ففي واقع الأمر أن هذه النظرية قد ظهرت بسبب ضرورتها عندما بدأ الرياضيون دراسة مثل هذه المشكلات ـ المتعلقة بالمجموعات اللانهائيةـ، والتي لم يكن بالإمكان حلها بدون هذه النظرية. فلو لم تكن نظرية المجموعات معروفةلكان من الضروري أن نبتكرها.

ألا توافقني على ذلك؟

الفصل الخامس
حلول وإجابات (*)

1. تقاطع المستقيم ق مع المستوى ى هو النقطة ب
عندئذ نكتب : أن التقاطع هو المجموعة المؤلفة من النقطة الوحيدة ب أي
ق ∩ ى = {ب}. أما إذا كان المستقيم ق موازيا للمستوى فإن تقاطعها
هو مجموعة خالية أي ق ∩ ى = Φ .
أما إذا كان المستقيم ق منطبقا على المستوى ى فإن ي يحوى المستقيم ق.
عندئذ يكون تقاطع ق مع ى هو المستقيم ق نفسه أي : ق ∩ ى =ق
2. ـ إن عدد عناصر مجموعة الفرق س/ع يساوى الفرق بين عدد عناصر المجموعتين س وع فقط في حالة كون المجموعة ع مجموعة جزئية من المجموعة س، أي في حالة : ع ⊂ س.
3. عملية توزيع الرسائل سوف تكون:
أـ تطبيقا متباينا إذا كان موزع البريد يوزعها بالشكل التالي:
في كل بيت يضع رسالة واحدة على الأكثر.
ب ـ تطبيقا غامرا (شاملا) إذا كان موزع البريد يضع في كل بيت رسالة واحدة على الأقل (أي انه يمكن لموزع البريد أن يضع في البيت أكثر من رسالة، ومن المهم هنا أن مجموعة البيوت تصبح «مغمورة» بالرسائل.
جـ ـ تقابلا إذا كان موزع البريد يضع في كل بيت رسالة واحدة فقط (في هذه الحالة : يجب أن يكون عدد الرسائل مساويا لعدد البيوت في القرية).
4. إن الزوج المرتب (ب، جـ) ليس مجموعة مؤلفة من عنصرين حتى إذا كان ب= جـ. إلا أنه في هذه الحالة تكون المجموعة {ب، ب} مؤلفة من عنصر

(*) نورد هنا حلول التمارين التي وردت في الكتاب مرقمة بالارقام (1، 2، 3، 4، . . . . ، 38)
وكذلك الإجابة على بعض التساؤلات التي وردت فيها.

وحيد هوب .

5. إن القبعتين تؤلفان زوجا، أما زوج الأحذية فهو زوج مرتب.

6. إن المجموعتين ص× ك و ك × ص غير متساويتين، ذلك أنهما لا تحويان عناصر متماثلة فالزوج المرتب (قلم، دفتر) يختلف عن الزوج المرتب (دفتر، قلم).

7. المجموعتان ص × ك و ك × ص متكافئتان بالقدرة لأن فيهما نفس العدد من العناصر. ويمكن أن نوجد تقابلا بينهما بالشكل: نقابل العنصر (ب، جـ) من الأولى بالعنصر (جـ، ب) من الثانية.

8. ص × ص = { (قلم، قلم)، (قلم، مسطرة)، (مسطرة، قلم)، (مسطرة، مسطرة)}.

ك × ك = { [دفتر، كتاب)، (كتاب، دفتر)، (دفتر، دفتر)، (كتاب، كتاب)}.

9. ـ إن عدد عناصر حاصل الضرب الديكارتي س×ع للمجموعتين س، ع يساوى (حاصل ضرب) عدد عناصر س بعدد عناصرع .

10. المساواة غير صحيحة في كل من ١٠ ـ ١١، ١٠ـ ١٣

11. المساواة ١١ ـ ١، ١١ـ ٢، ١١ ـ ٣، ١١ـ ٤ صحيحة من أجل أي ثلاثة أعداد طبيعية أ، ب، جـ.

١١ ـ ٥ صحيحة فقط في حالة أ = ١ .

١١ ـ ٦ غير صحيحة من أجل عدد طبيعي (لا نعتبر هنا أن الصفر عدد طبيعي).

١١ ـ ٧ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي .

١١ ـ ٨ غير صحيحة من أجل الأعداد الطبيعية .

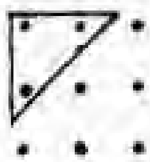
١١ ـ ٩ ، ١١ ـ ١٠ صحيحة من أجل أي أعداد طبيعية .

١١ ـ ١١ صحيحة فقط في حالة أ = ب .

١١ ـ ١٢ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي .

12. بمقارنة العلاقات ١٠ ـ ١ إلى ١٠ ـ ١٢ مع المساواة ١١ـ١ إلى ١١ـ١٢ نجد أن المساواة ١١ تنتج من العلاقات ١٠ بتبديل الإشارة ∩ بـ ×، والإشارة ∪ بالرمز + ، والإشارة / بالرمز ⁻ ، وبتبديل المجموعات س، ع، ص بالأعداد أ، ب، جـ على الترتيب والمجموعة Φ بالعدد صفر مع ملاحظة أن ٦، ٨ من ١١ لا تصحان في حالة الأعداد الطبيعية.

13. لنوضح بالرسم عددين متتاليين من الأعداد «المثلث» لنأخذ مثلا العددين ٣ و٦



مجموع العددين : ٣ + ٦ = ٩ والعدد ٩ هو $٣^{٢}$

أي مربع عدد صحيح . ويمكن أن نناقش الأمر بشكل مماثل في الحالات العامة.

14. نجد هنا عددا آخر (كاملا أو مثاليا) من أجل ن=٤

$٢^{ن+١}$ ـ ١ = $٢^{٤+١}$ ـ ١ = $٢^{٥}$ ـ ١ = ٣١ والعدد ٣١

هو عدد أولي ولذلك فإن: $٢^{ن}$ ($٢^{ن+١}$ـ١) = $٢^{٤}$ ($٢^{٥}$ ـ ١) = $٢^{٤}$×٣١= ١٦×٣١= ٤٩٦

عدد كامل أو مثالي. قواسم هذا العدد هي :

١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ٣١، ٦٢، ١٢٤، ٢٤٨ ويكون مجموعها يساوي ١+٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣١ + ٦٢ + ١٢٤ + ٢٤٨ = ٤٩٦ العدد نفسه.

ويمكن ايجاد هذا العدد باستخدام القانون $٢^{ن-١}$ ($٢^{ن}$ ـ ١) حيث أن ن= ٥ (عدد أولي) المحرر

15. إن مربع أي عدد ليس عددا أوليا لأنه يمكن كتابته (المربع) بشكل جداء أعداد أولية (هو العدد في نفسه).

16. لا يوجد أكبر عدد طبيعي ، وإذا افترضنا أنه يوجد عدد طبيعي N هو أكبر

عدد طبيعي، فإننا بواسطة إضافة الواحد إليه نحصل على عدد أكبر منه هو N + ١ وبالتالي فإن N ليس أكبر عدد طبيعي.

17. العدد الطبيعي ١ ليس له سابق في مجموعة الأعداد الطبيعية، أما بقية الأعداد الطبيعية فلكل عدد منها ن سابق هو ن-١.

18. هذه النتيجة صحيحة فقط من أجل المجموعات اللانهائية القابلة للعد.

ذلك أن المجموعات اللانهائية تقسم إلى: مجموعات قابلة للعد وأخرى غير قابلة للعد، والمجموعات القابلة للعد هي المجموعة التي تحوى عناصر بقدر عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية. فالمجموعة اللانهائية يمكن عدها إذا أمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية، وهذا يعني أن المجموعات تكون قابلة للعد فقط إذا كان هناك تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية، أما المجموعة غير القابلة للعد فهي المجموعة التي لا يمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية: مثلا: مجموعة نقاط المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعات غير قابلة للعد.

فالأعداد الحقيقية مثلا لا يمكن وضعها في (سلسلة). (كما فعلنا بالأعداد الفردية والزوجية)، ثم ترقيم هذه السلسلة بالأعداد الطبيعية. (وهذا ما أوضحه كانتور في عام ١٨٧٣) إذن لا يمكن أن نجد تقابلا بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد الطبيعية. استنادا لذلك نتوصل إلى النتيجة التالية: أن الأعداد الحقيقية هي أكثر من الأعداد الطبيعية، مع أن المجموعتين لا نهائيتان. وفي الحالة العامة تكون المجموعات غير القابلة للعد ذات عناصر أكثر من المجموعات القابلة للعد.

19. الأمر لا يتم تماما بهذا الشكل «النزلاء يغادرون الفندق، والفندق يبقى مليئا»، فهناك حالتان لا يبقى في الفندق بعدها عدد لا نهائي من النزلاء. الحالة الأولى: يبقى الفندق بعدها فارغا، والحالة الثانية: يبقى في الفندق بعدها عدد منته من النزلاء. فالفندق يصبح فارغا إذا غادره ط من النزلاء،

حيث ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية، لأنه في هذه الحالة سيبقى في الفندق ط/ط= Φ أي يصبح خاليا.

أما إذا غادر الفندق كل النزلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام أكبر من ن (حيث ن ∈ ط) فسوف يبقى في الفندق ن من النزلاء (عدد منته؟. وهذه الحالة يمكن أن نكتبها: ط/ {ط/ {١، ٢، ٣، . . . ن}}= {١، ٢، ٣، . . . ن}. أما في بقية الحالات، فإنه يبقى في الفندق عدد لا نهائي من النزلاء مهما يكن عدد الذين غادروه. فإذا غادر الفندق النزلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام الفردية فإننا نكتب هذه الحالة بالشكل: يبقى في الفندق: ط/ {٢ ن+ ١ : ن ∈ ط} = {٢ ن : ن ∈ ط}

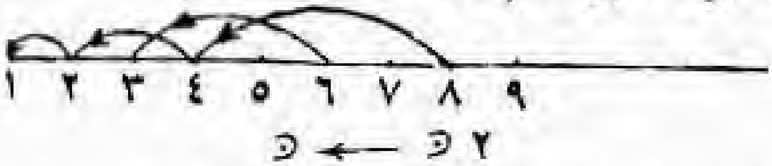
20. لنفرض أنه غادر الفندق عددلانهائي من النزلاء، السؤال هنا لا معنى له، ذلك أنه في هذا الترقيم لغرف الفندق اللانهائية لا يوجد غرفة لا نهائية (ذلك أن مجموعة الأعداد الطبيعية ليس فيها عدد «أخير»).

21. لنفترض أنه قد غادر الفندق كل النزلاء الذين يشغلون الغرف ذات الأرقام الفردية: ١، ٣، ٥، ٧، . . . فكيف تتصرف الإدارة في الفندق؟ في هذه الحالة سوف تشغل الإدارة الغرف الخالية (ذات الأرقام الفردية بالشكل التالي):

تنقل نزيل الغرفة ٢ الى الغرفة ١

ونزيل الغرفة ٤ إلى الغرفة ٢

ونزيل الغرفة ٦ إلى الغرفة ٣



وبصورة عامة تنقل نزيل الغرفة ٢ن إلى الغرفة ن حيث ن= ١، ٢، ٣، . . .

22. إن الفرق $x_1 - x_2$ يمكن أن تكون أي عدد فهي يمكن ان تساوى العدد صفر أو تساوى العدد x_1 لذلك فنحن نكتب $x_1 - x_2 \leq x_1$ انظر مرة اخرى إلى

حل التمرين 19 .

23. يقصد به هنا هندسة لوباتشفسكي(٢٢) وريمان (٢٣) ولهذه الهندسات الثلاث مسلمات حول التوازى تختلف الواحدة منها عن الأخرى اختلافا جوهريا، وكلها تتعلق بامكانية رسم مستقيم مواز لمستقيم مفروض من نقطة خارج المستقيم المفروض (أو حول الخطوط الجيوديزية للمستوى). في هندسة ريمان نجد أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مواز لهذا المستقيم.

أما في هندسة لوباتشفسكي فنجد أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيمين موازيين لهذا المستقيم، في هذه الحالة تصبح النظرية التالية صحيحة :

من أي نقطة خارج مستقيم يمر مستقيمان موازيان للمستقيم المفروض وتمر مجموعة لا متناهية من المستقيمات التي يكون المستقيم المفروض غير مواز وغير قاطع لها. ومن الطبيعي أن يكون تعريف التوازي في هذه الحالة مختلفا عما هو معروف لدينا في هندسة أقليدس.

تختلف هذه الهندسات الثلاث ـ أيضا ـ في قياسها للزوايا الداخلية للمثلث. ففي هندسة لوباتشفسكي : مجموع قياس زوايا المثلث الداخلية أصغر من قائمتين. وفي هندسة ريمان: مجموع قياس زوايا المثلث الداخلية أكبر من قائمتين. أما في هندسة أقليدس: فمجموع زوايا المثلث الداخلية يساوى قائمتين.

24. عند طرح العدد الطبيعي الصغير من العدد الطبيعي الكبير نحصل دوما على عدد طبيعي. إذن: إذا كان ب، جـ ∈ ط فإن ب ـ جـ يكون عددا طبيعيا إذا كان ب > جـ.

---

(٢٢) نيكولاي ايفانوفيتش لوباتشفشكي (١٧٩٤ ـ ١٨٥٦م) عالم رياضيات سوفييتي ـ استاذ جامعة قازان. (Lobachevski NI)

(٢٣) برنفراد ريمان ـ ١٨٢٦ ـ ١٨٦٦م) عالم رياضيات الماني ـ استاذ جامعة غوتن. (Riemann B.)

25. إذا كان المقسوم عليه هو أحد قواسم المقسوم فإن ناتج القسمة هي عدد طبيعي دوما. أي أن ب/جـ (حيث ب، جـ ∈ ط، جـ ≠ ٠) هو عدد طبيعي إذا كان جـ هو أحد قواسم العدد ب.

26. لا ندرس في الأعداد الطبيعية فك الأقواس (بصورة عامة).
[ذلك أننا لا ندرس عملية فك القوس المسبوق بإشارة (−) في الأعداد الطبيعية].

27. مجموعة الأعداد الطبيعية غير متراصة. ذلك أنه بين عددين طبيعيين متتالين لا يوجد عدد طبيعي ثالث يختلف عنهما.

28. إذا رمزنا لرئيس مجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز C
ولرئيس مجموعة الأعداد الطبيعية بـ $\aleph_0$ فإن $C=2^{\aleph_0}$.
لنتذكر أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة لا نهائية، ولكنها قابلة للعد.
أما مجموعة الأعداد الحقيقية فهي مجموعة لا نهائية وغير قابلة للعد*.

29. $١٩ = ١ \times ١٠^{١} + ٩ \times ١٠^{٠}$
$٢٣٤ = ٢ \times ١٠^{٢} + ٣ \times ١٠^{١} + ٤ \times ١٠^{٠}$
$٩٠٣ = ٩ \times ١٠^{٢} + ٠ \times ١٠^{١} + ٣ \times ١٠^{٠}$
$١٤٦٩ = ١ \times ١٠^{٣} + ٤ \times ١٠^{٢} + ٦ \times ١٠^{١} + ٩ \times ١٠^{٠}$

30. $١٧ = ١٦ + ١ = ١ \times ٢^{٤} + ٠ \times ٢^{٣} + ٠ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٠} = ١٠٠٠١$
$٢٣ = ١٦ + ٤ + ٢ + ١ = ١ \times ٢^{٤} + ٠ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٠} =$
١٠١١١.
$٤٥ = ٣٢ + ٨ + ٤ + ١ = ١ \times ٢^{٥} + ٠ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{١} +$
$١ \times ٢^{٠} = ١٠١١٠١$

* لكننا لا نعرف «كم» هو عدد عناصر مجموعة الأعداد الحقيقية حسب فهمنا المألوف للكلمة «كم». المحرر.

$١١٥ = ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ٢ + ١ = ١×٢^{٦} + ١×٢^{٥} + ١×٢^{٤} + ٠×٢^{٣} +$
$٠×٢^{٢} + ١×٢^{١} + ١×٢ = ١١١٠٠٠١١$

$٣٢٤ = ٢٥٦ + ٦٤ + ٤ = ١×٢^{٨} + ٠×٢^{٧} + ١×٢^{٦} + ٠×٢^{٥} + ٠×٢^{٤} +$
$٠×٢^{٣} + ١×٢^{٢} + ٠×٢^{١} + ٠×٢ = ١٠١٠٠٠١٠٠$

$٦٤٠ = ٥١٢ + ١٢٨ = ١×٢^{٩} + ٠×٢^{٨} + ١×٢^{٧} + ٠×٢^{٦} + ٠×٢^{٥} +$
$٠×٢^{٤} + ٠×٢^{٣} + ٠×٢^{٢} + ٠×٢^{١} + ٠×٢^{٠} = ١٠١٠٠٠٠٠٠٠$

31. يمكن أن نصل الى نفس النتيجة بتبديل الإشارات الضوئية بالأعداد صفر واحد. عندما يكون الضوء مضاء نضع ١، الضوء غير مضاء نضع ٠، لنر الكتابة الموافقة في التعداد الثنائي والتعداد العشري فنجد:

١٠١		٥	
+ ١٠١		+ ٦	
١٠١١	في التعداد الثنائي و	١١	في التعداد العشري

32. ق ∧ ك = ك ∧ ق

[لبرهان العلاقات 32 وحتى 38 نضع جدول الصواب لها]

ق	ك	ق ∧ ك	ك	ق	ك ∧ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	خ	خ	خ	خ	خ

33. ق ٧ ك = ك ٧ ق

ق	ك	ق ٧ ك	ك	ق	ك ٧ ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	خ	خ	ص

34. ق⇔ك = ك⇔ق

ق	ك	ق⇔ك	ك	ق	ك⇔ق
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	خ	ص	خ	خ	ص

35. ق ⇐ (ك ٨ (∼ك))

ق	ك	∼ك	ك ٨ (∼ك)	ق ⇐ (ك ٨ (∼ك)
ص	ص	خ	خ	خ
ص	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص

36. ق ⇐ (ك ∧ ق)

ق	ك	ك ∧ ق	ق ⇐ (ك ∧ ق)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

37. (ق ∧ ك) ⇐ ق

ق	ك	ق ∧ ك	(ق ∧ ك) ⇐ ق
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

38. ك ⇐ (ق ∨ ك)

ق	ك	ق ∨ ك	ك ⇐ (ق ∨ ك)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص

سرد أبجدي باللغة الإنجليزية
لبعض المصطلحات الرياضية الواردة

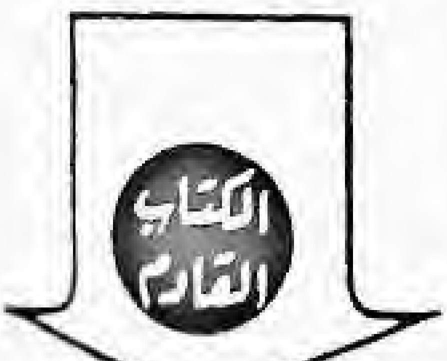
A ~ B	A تكافىء أو تساوى B بالقدرة
Actually Listing	طريقة القائمة (لكتابة المجموعة)
Algebra of Logic	جبر المنطق
Associative	تجميعي
Axiom	مسلمة (مصادرة أو موضوعة)
Biconditional	. . . اذا وفقط اذا . . . (اقتضاء ثنائي)
Bijective	تقابل (تطبيق)
Binary Operation	عملية اثنانية (ثنائية)
Card (X)	رئيسي مجموعة :س (X)
Characterizing Property	طريقة القاعدة أو الصفة المميزة (لكتابة المجموعة)
Closed Set	مجموعة مغلقة
Co-domain	المستقر (المجال المقابل)
Commutative	إبدالي
Compact Set	مجموعة متراصة
Complement	متممة
Conditional	اذا . . فإن (اقتضاء)
Conjunction	أداة الربط (و)
Disjunction	أداة الربط (أو)
Domain	المنطلق (المجال)
Element	عنصر

Empty Set	المجموعة الخالية
Equal Sets	المجموعات المتساوية
Equation	معادلة
Exristential Quantifier	∃ (يوجد على الأقل)
First Element	المسقط الأول (للزوج المرتب)
Function	تابع (دالة أو تطبيق)
Ideal Number	العدد المثالي
In Finity	اللانهاية
Injective	متباين (تطبيق)
Intersection	تقاطع
Line Co - ordinatc Systemı	محور أحداثي
Mapping	تطبيق (تابع ، دالة)
Natural Number	عدد طبيعي
Negation	رنفي (قضية)
Neutral Elemenlt	عنصر محايد
Open Sentence	جملة مفتوحة
Ordered Pair	زوج مرتب
Ordered Set	مجموعة مرتبة
Ordinal Number	عدد ترتيبي
Pair	زوج
Prime Number	عدد أولي
Product	جداء (حاصل ضرب)
Rational Number	عدد عادي (نسبي)
Real Number	عدد حقيقي
Second Element	مسقط ثاني (زوج مرتب)

Set Theory	نظرية المجموعات
Statement	قضية منطقية (عبارة)
Subset	مجموعة جزئية
Surjective	غامر أو شامل (تطبيق)
The Connectirves	أدوات الربط
The Number line	خط الأعداد
Trans formation Geometry	هندسة التحويلات
Uncountable Set	مجموعة غير قابلة للعد
Union	اجتماع (اتحاد)
Universal Quantifier	$\forall$ (لكل أو لجميع)
Variable	متحول (متغير)
Venn Diagram	مخطط فن
Well - Ordered Set	مجموعة مرتبة جيدا
Y Image of X	ع صورة س
Z - Set of Integrs	صـ مجموعة الأعداد الصحية

المترجمة في سطور

- د. فاطمة عبد القادر الما
- من مواليد سورية
- حصلت على درجة الماجستير في العلوم الرياضية والفيزيائية من جامعة لينين البلاروسية عام ١٩٧٨.
- حصلت على درجة دكتوراه فلسفة في التربية عام ١٩٨٢.
- أشرفت على طلاب التأهيل في المجلات التربوية السورية حول تطوير الرياضيات المدرسية وتطوير مناهجها وطرائق تدريسها.
- تعمل حاليا موجهة أولى للرياضيات بوزارة التربية السورية.



معالم على طريق تحديث الفكر العربي

تأليف: د. معن زيادة